פתרון תרגיל

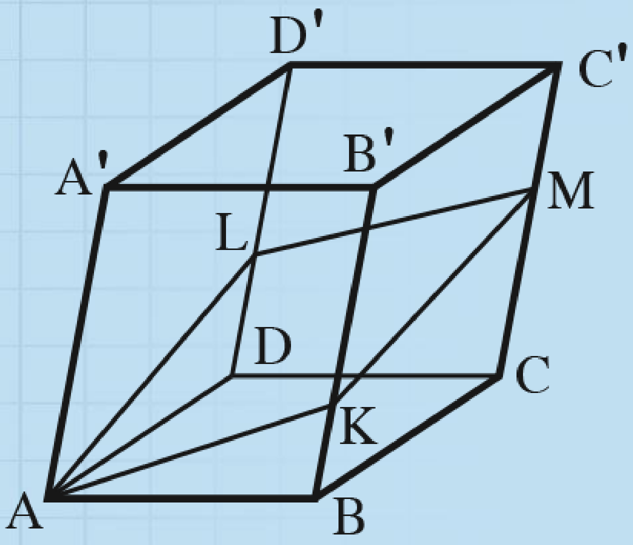
וקטורים – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 632, ת. 9

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה



9) במקבילון $ABCDA'B'C'D'$ הנקודה K מקיימת $BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'. המישור העובר דרך A, K ו-L חותך את CC' בנקודה M. נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AD}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CM} = t\,\overrightarrow{CC'}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ ו-$\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

ב. הבע את $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ופרמטרים s ו-r בהסתמך על כך שהווקטורים $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ ו-$\overrightarrow{AM}$ נמצאים באותו מישור.

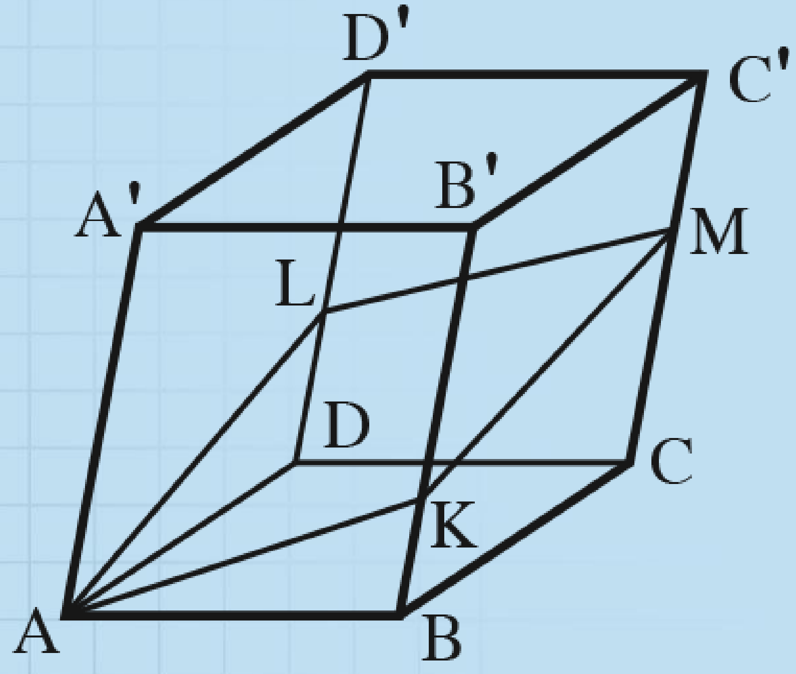
ג. מצא את t וחשב באיזה יחס מחלקת הנקודה M את CC'.

השאלה

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור $ABCD$ הוא 9.

(1) מצא את z. (2) מצא את שיעורי הנקודה M.

ה. חשב את נפח הפירמידה $MABCD$.

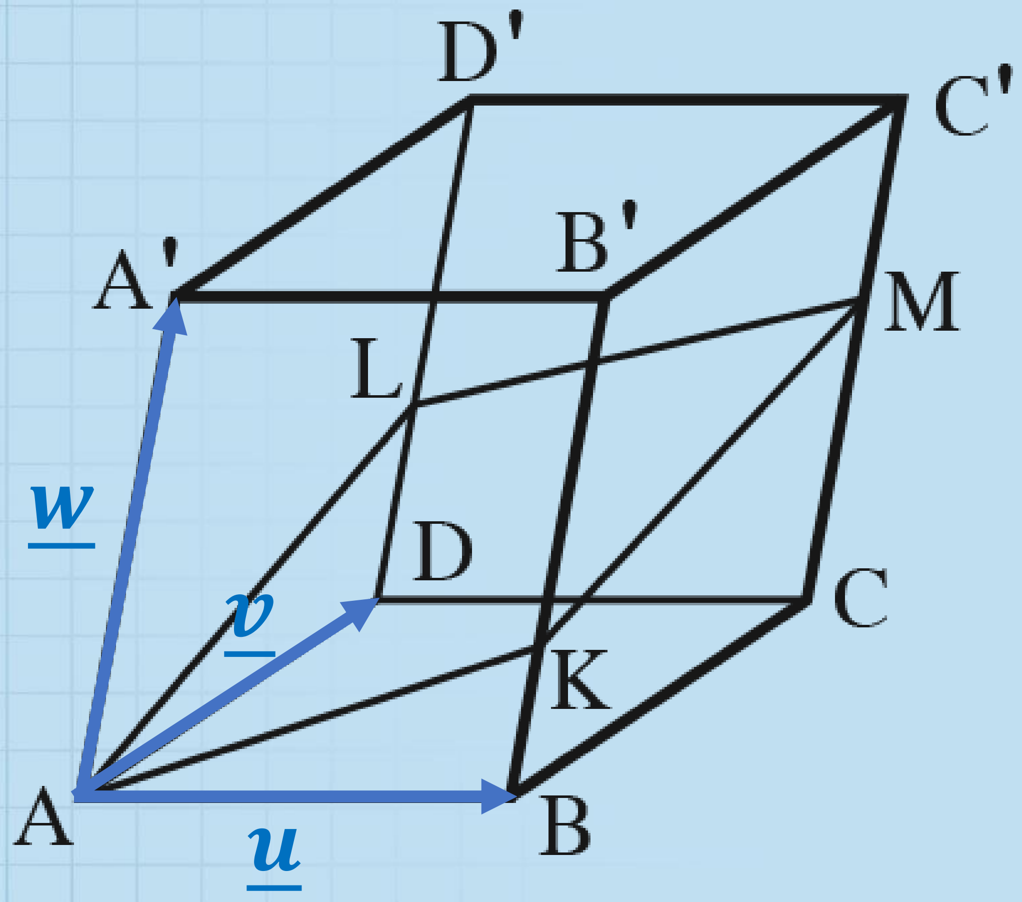


$BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'.

$\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CC'}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ ו-$\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

פתרון



$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}$$

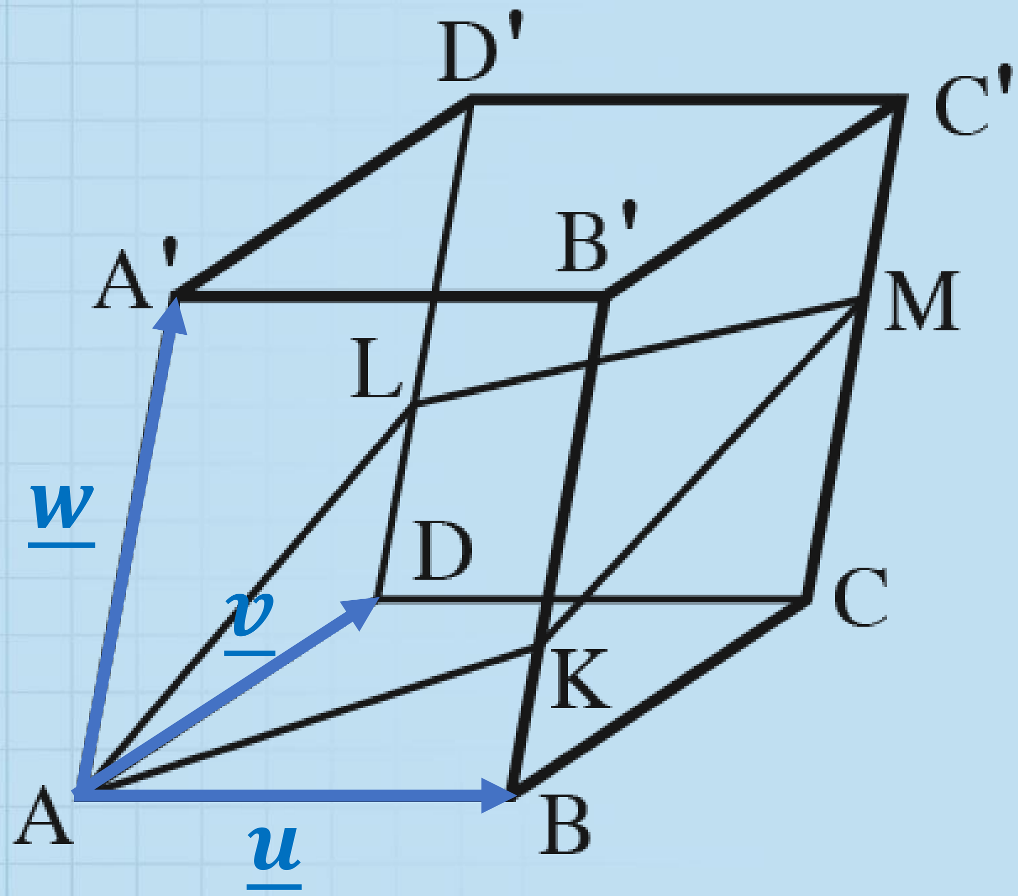
$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \underline{u} + \underline{v} + t\underline{w}$$

$BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'. $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CC'}$.

ב. הבע את $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ופרמטרים s ו-r בהסתמך על כך שהווקטורים $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ ו-$\overrightarrow{AM}$ נמצאים באותו מישור.

פתרון



המישור $AKML$ נפרש ע"י $\overrightarrow{AK}$ ו- $\overrightarrow{AL}$

ולכן הווקטור $\overrightarrow{AM}$ המוכל במישור,

יהווה צירוף לינארי שלהם

$$\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{AL} + s\overrightarrow{AK}$$

$BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'. ב. הבע את $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ופרמטרים s ו-r בהסתמך על כך שהווקטורים $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ ו-$\overrightarrow{AM}$ נמצאים באותו מישור. $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CC'}$.

פתרון

$$\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{AL} + s\overrightarrow{AK}$$

$$= r\left(\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right) + s\left(\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = s\underline{u} + r\underline{v} + \left(\frac{r}{2} + \frac{s}{4}\right)\underline{w}$$

$BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'.

ג. מצא את t וחשב באיזה יחס מחלקת הנקודה M את CC'. $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CC'}$.

פתרון

עפ"י יחידות ההצגה:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \underline{u} + \underline{v} + t\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AM} = s\underline{u} + r\underline{v} + \left(\frac{r}{2} + \frac{s}{4}\right)\underline{w}$$

$BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'.

ג. מצא את t וחשב באיזה יחס מחלקת הנקודה M את CC'. $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CC'}$.

פתרון

$$\underline{u} + \underline{v} + t\underline{w} = s\underline{u} + r\underline{v} + \left(\frac{r}{2} + \frac{s}{4}\right)\underline{w}$$

$$1 = s \qquad 1 = r \qquad t = \frac{r}{2} + \frac{s}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{3}{4}$$

$BK:KB' = 1:3$ והנקודה L היא אמצע DD'.
$\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CC'}$.

ג. מצא את t וחשב באיזה יחס מחלקת הנקודה M את CC'.

פתרון

$$\overrightarrow{CM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$$

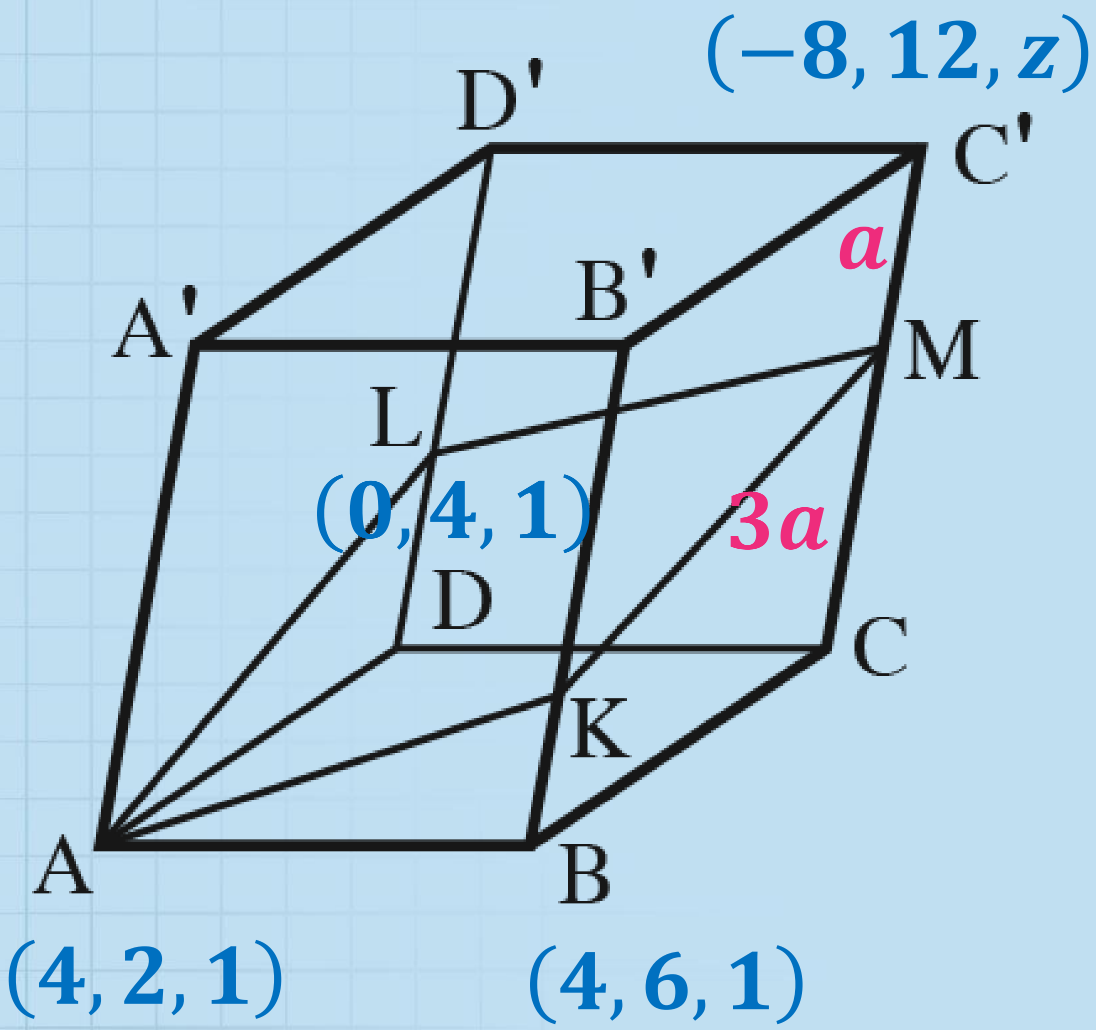
הנקודה M מחלקת את CC' ביחס:

$$\frac{CM}{MC'} = \frac{3}{1}$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(1) מצא את z.

פתרון



מרחק הנקודה M ממישור הבסיס (אורך האנך מהנקודה למישור) הוא 9 והנקודה מחלקת את CC' ביחס $3:1$

עפ״י פרופורציה, אורך האנך (המרחק בין המישורים) יהיה 12

מרחק הנקודה C' ממישור הבסיס הוא 12

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(1) מצא את z.

פתרון

נמצא את משוואת מישור הבסיס:

$$\overrightarrow{AD} = (-4,2,0) = -2(2,-1,0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,4,0) = 4(0,1,0)$$

$$\vec{N} \cdot (2,-1,0) = 0$$

$$\vec{N} \cdot (0,1,0) = 0$$

$$(a,b,c) \cdot (2,-1,0) = 0$$

$$(a,b,c) \cdot (0,1,0) = 0$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(1) מצא את z.

פתרון

$$(a,b,c)\cdot(2,-1,0)=0$$

$$2a-b=0$$

$$a=0$$

$$(a,b,c)\cdot(0,1,0)=0$$

$$b=0$$

$$\vec{\boldsymbol{N}}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(1) מצא את z.

פתרון

משוואת המישור מהצורה:

$$z + D = 0$$

הנקודה $D(0,4,1)$ על המישור ולכן מקיימת את משוואתו:

$$1 + D = 0$$

$$\boldsymbol{D = -1}$$

$$\boldsymbol{z - 1 = 0}$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(1) מצא את z.

פתרון

מרחק הנקודה CC' מהמישור $Z-1=0$

$$\frac{|Z-1|}{\sqrt{1^2}}=12$$

$$Z-1=-12$$

$$Z-1=12$$

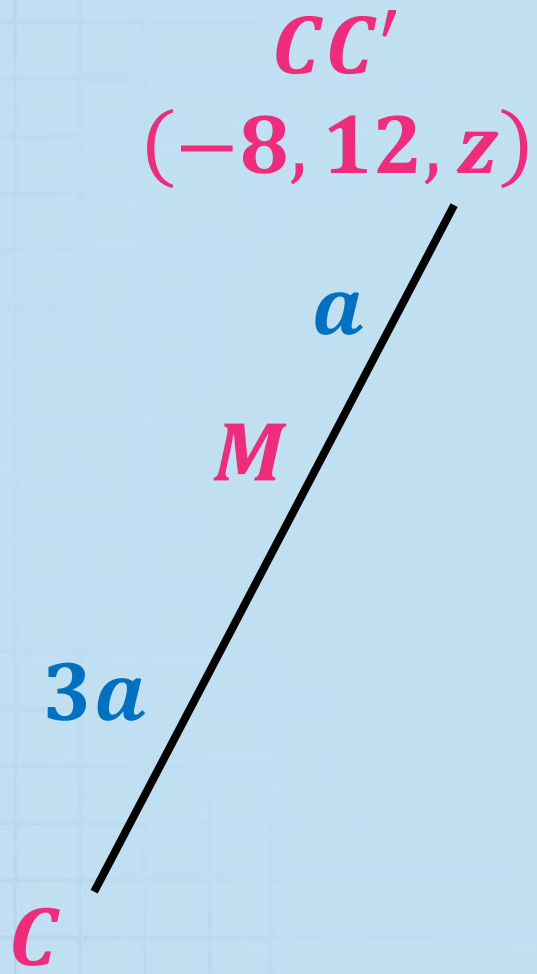
$$\mathbf{Z=-11}$$

$$\mathbf{Z=13}$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(2) מצא את שיעורי הנקודה M.

פתרון



הנקודה M מחלקת את CC' ביחס $3:1$

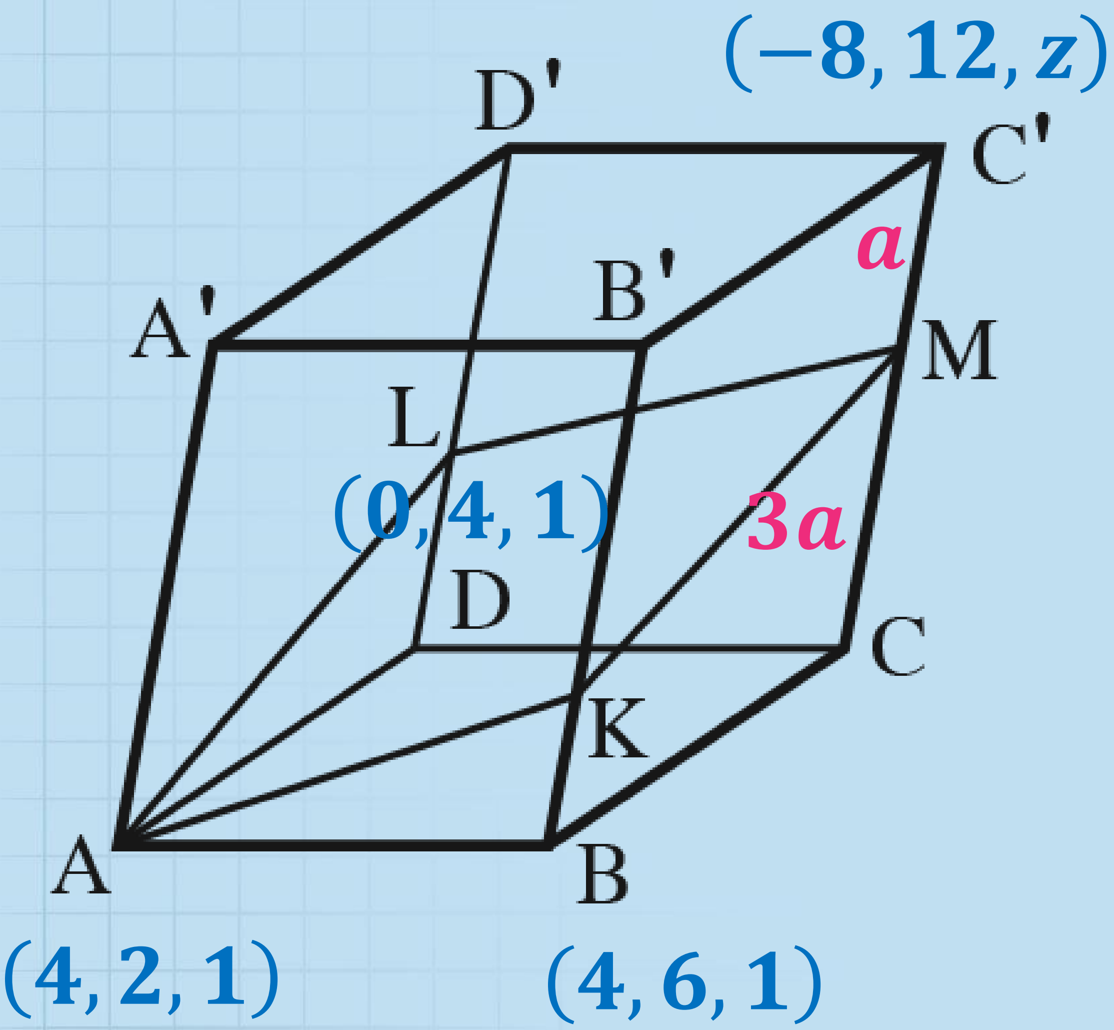
נמצא את שיעורי הנקודה C

הנקודה C חיתוך בין הישרים BC ו- DC

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(2) מצא את שיעורי הנקודה M.

פתרון



נתון מקבילון:

$$BC:\ \underline{x} = \underline{B} + t\overrightarrow{AD}$$

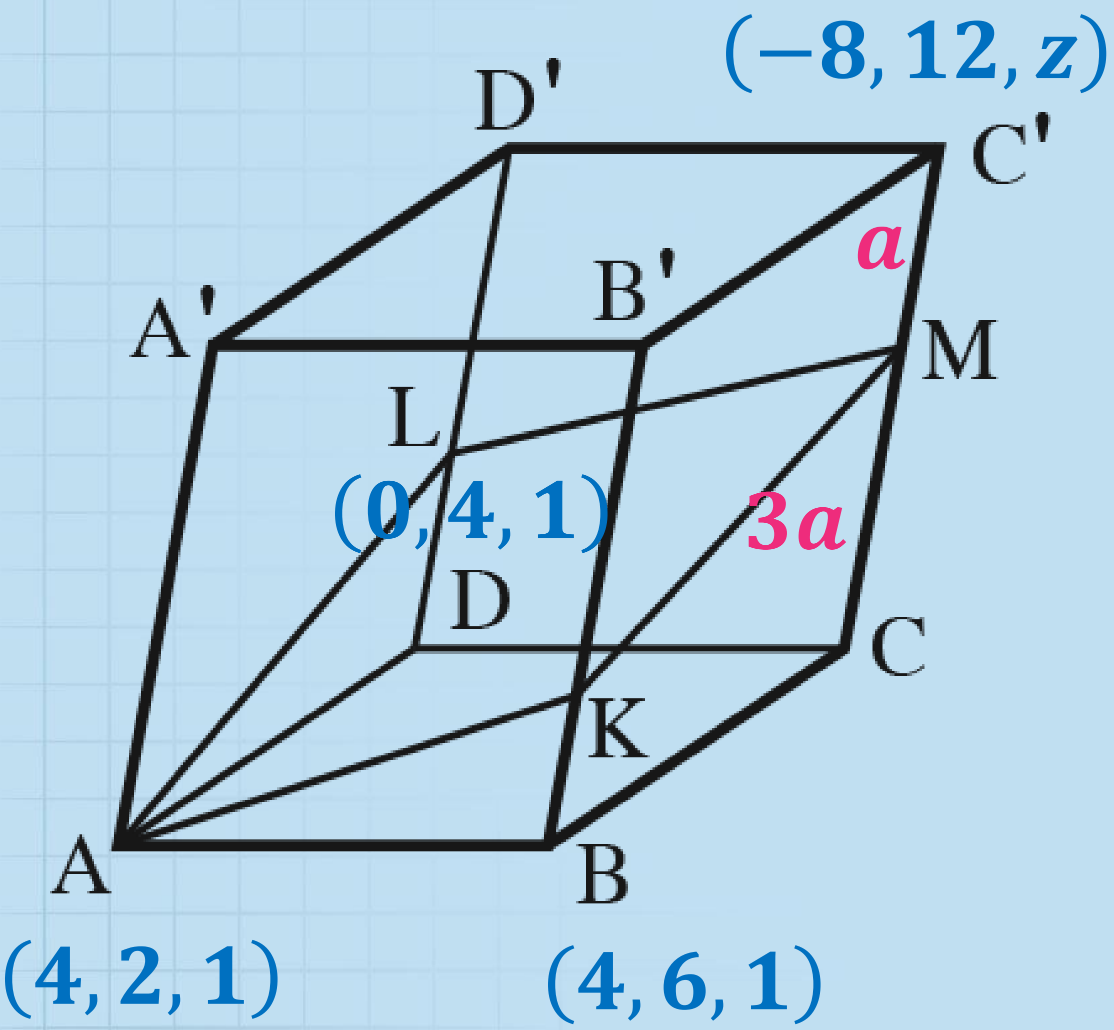
$$= (4,6,1) + t(2,-1,0)$$

$$\boldsymbol{C = (4 + 2t_c, 6 - t_c, 1)}$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(2) מצא את שיעורי הנקודה M.

פתרון



נתון מקבילון:

$$DC: \underline{x} = \underline{D} + s\overrightarrow{AB}$$

$$= (0,4,1) + s(0,1,0)$$

$$\boldsymbol{C = (0, 4 + S_c, 1)}$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(2) מצא את שיעורי הנקודה M.

פתרון

$$C=(4+2t_c,6-t_c,1)=(0,4+S_c,1)$$

$$4+2t_c=0 \qquad 6-t_c=4+S_c \qquad 1=1$$

$$t_c=-2 \quad \Rightarrow \quad S_c=4$$

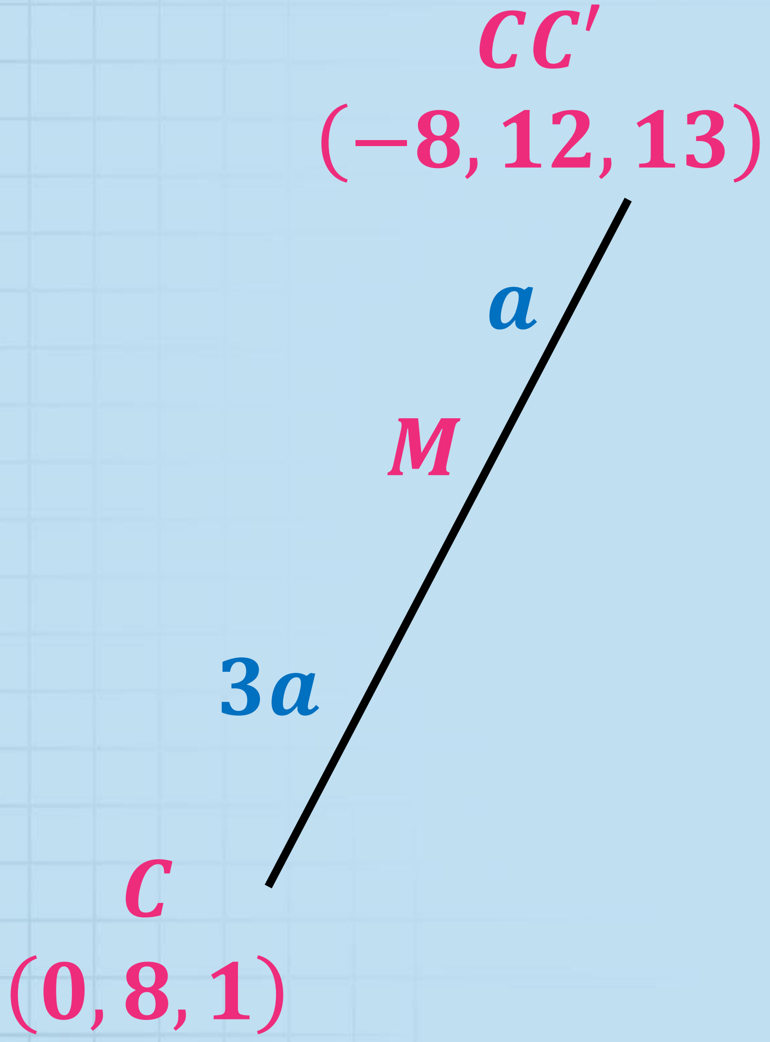
$$C=(0,8,1)$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.

(2) מצא את שיעורי הנקודה M.

פתרון

$$Z = 13$$



עפ״י חלוקת קטע ביחס נתון:

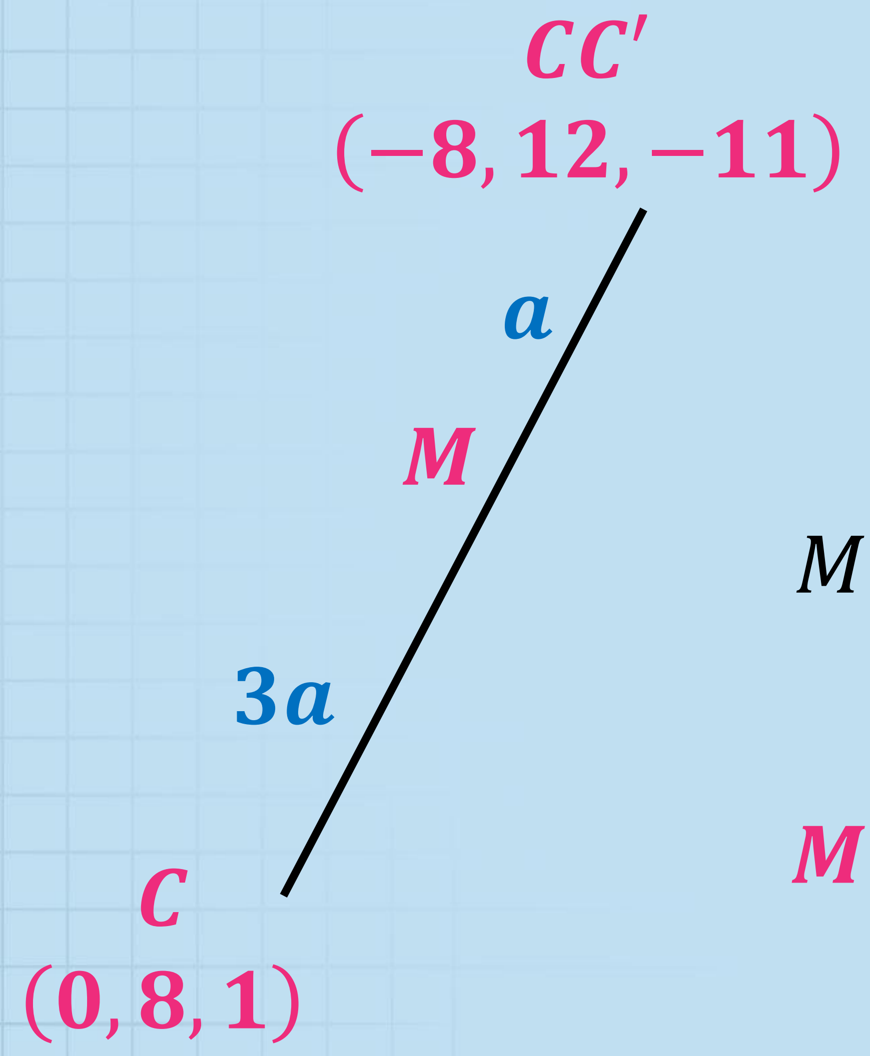
$$M\left(\frac{-8\cdot 3}{4}, \frac{12\cdot 3 + 8\cdot 1}{4}, \frac{13\cdot 3 + 1\cdot 1}{4}\right)$$

$$M(-6, 11, 10)$$

ד. נתון: $A(4,2,1)$, $B(4,6,1)$, $D(0,4,1)$, $C'(-8,12,z)$ והמרחק של הנקודה M מהמישור ABCD הוא 9.
(2) מצא את שיעורי הנקודה M.

פתרון

$Z=-11$



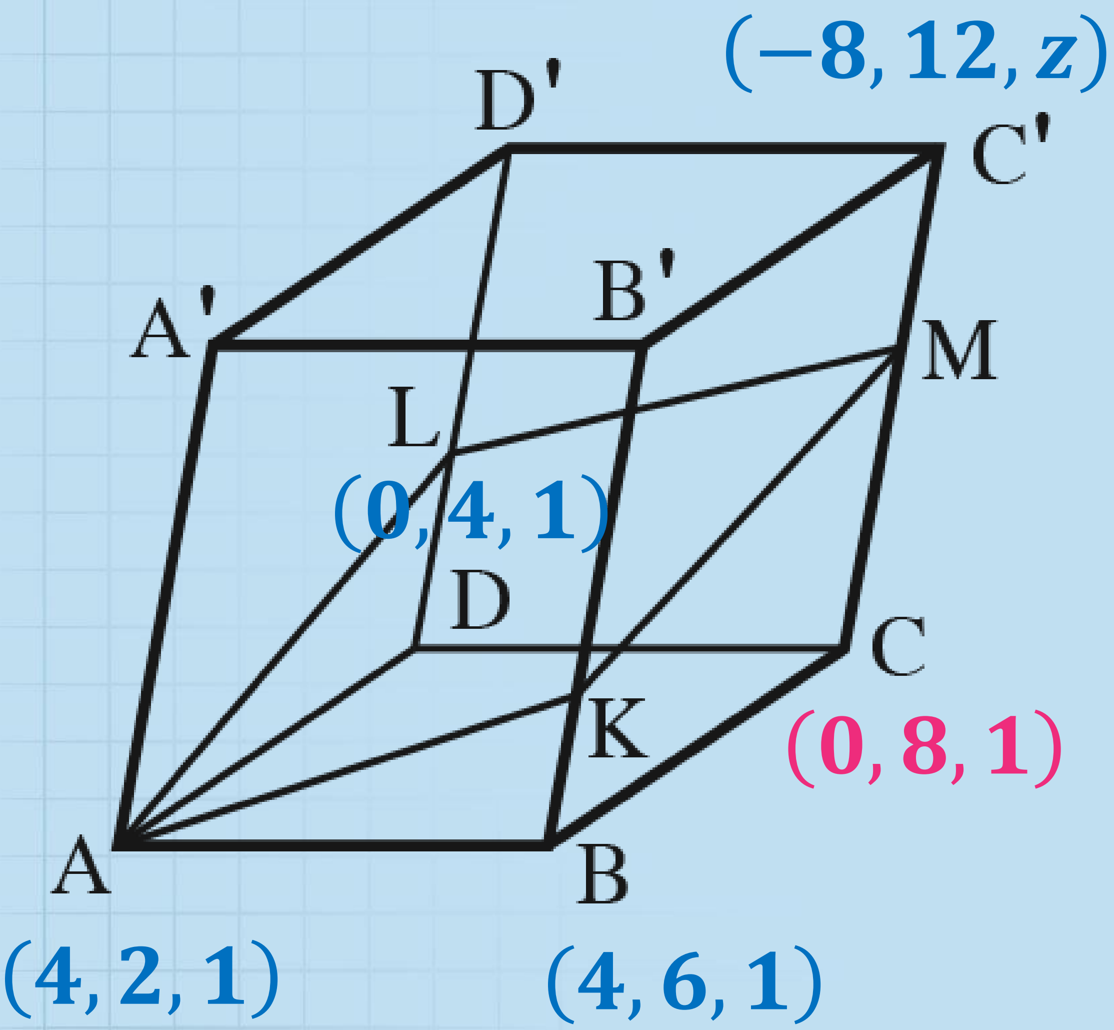
עפ״י חלוקת קטע ביחס נתון:

$$M\left(\frac{-8\cdot3}{4},\frac{12\cdot3+8\cdot1}{4},\frac{-11\cdot3+1\cdot1}{4}\right)$$

$M(-6,11,-8)$

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



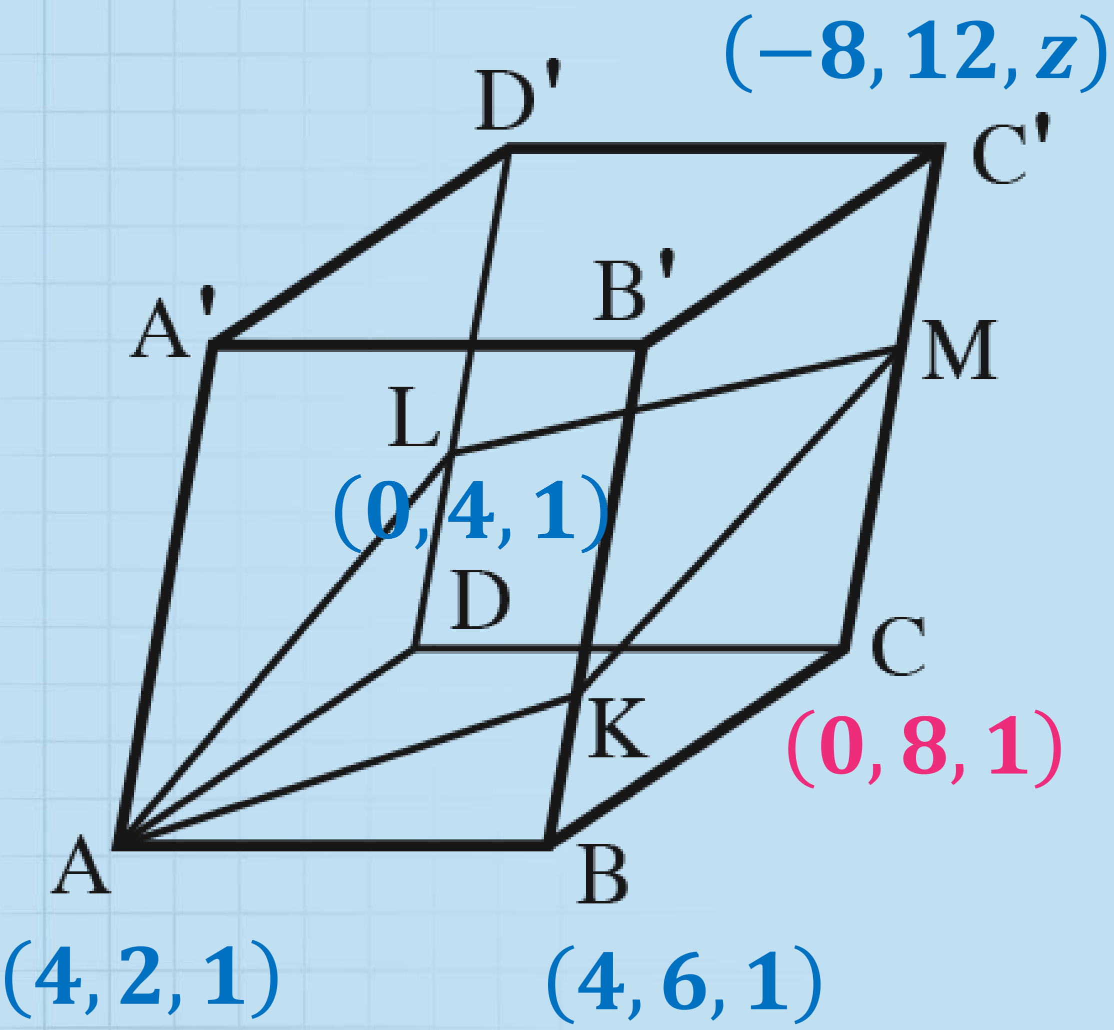
$$V = \frac{h \cdot S_{ABCD}}{3}$$

מרחק הנקודה M ממישור הבסיס (אורך האנך מהנקודה למישור) הוא 9

$$h = 9$$

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



$S_{ABCD} = ?$

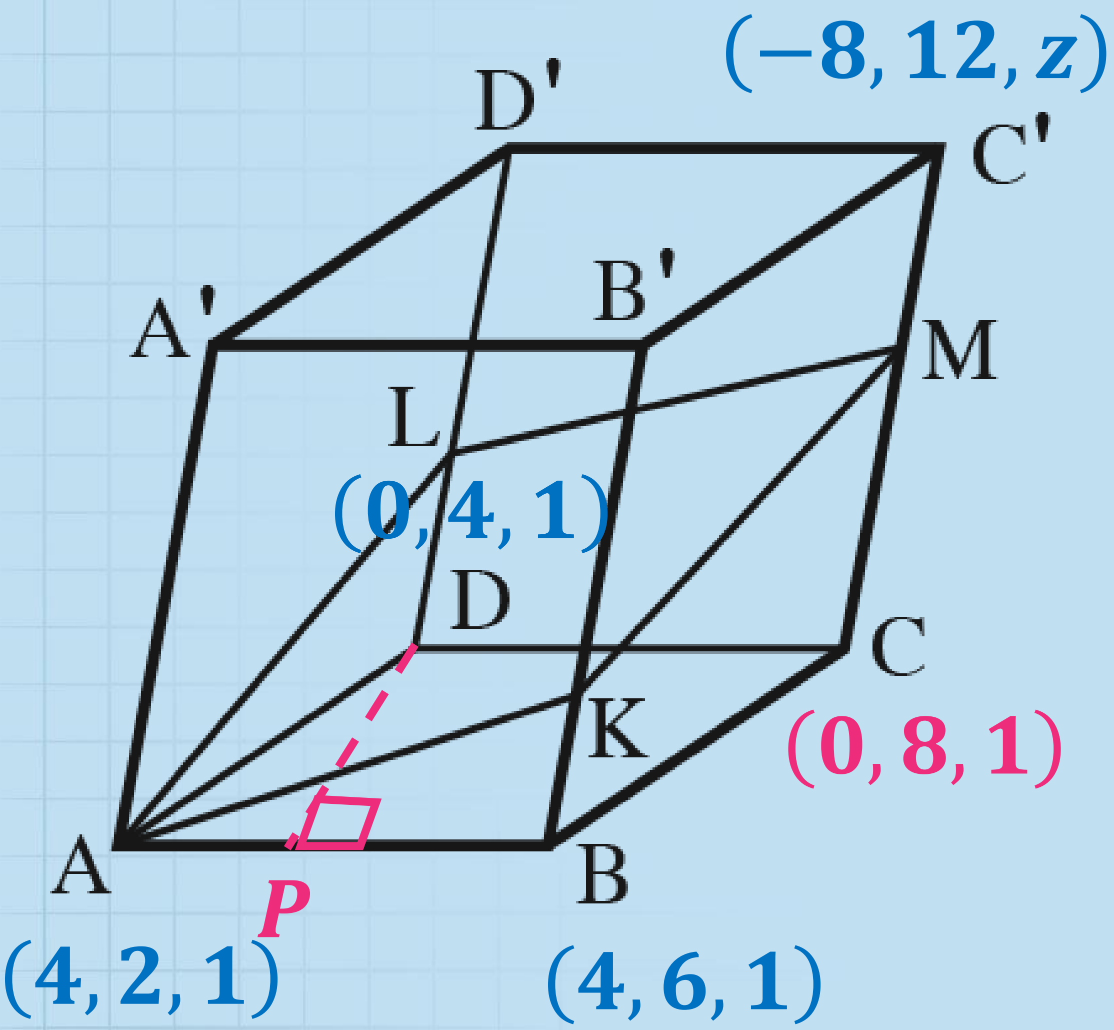
$$\boldsymbol{AB = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = 4}$$

נמצא את גובה המקבילית,

מרחק הנקודה D מהישר AB

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



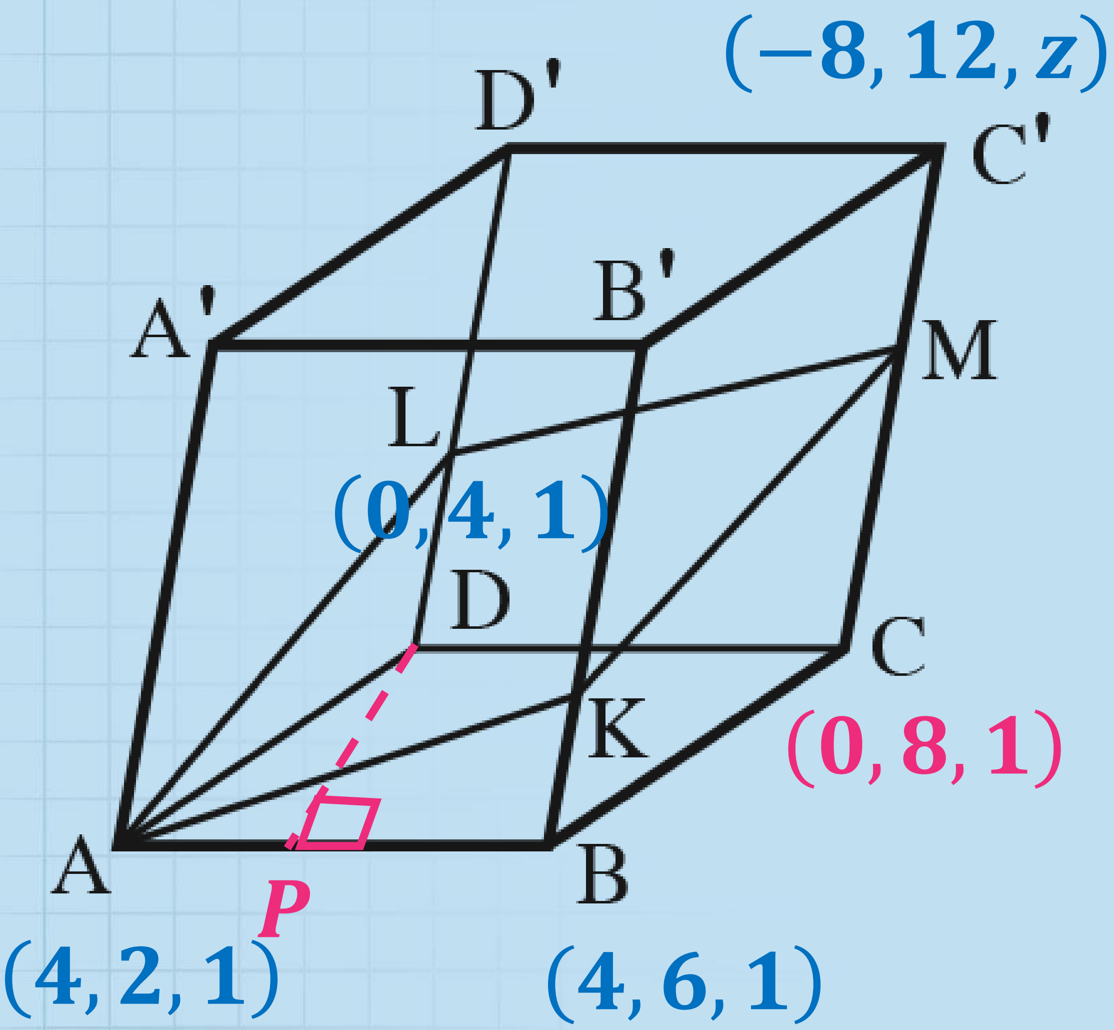
נסמן נקודה P על הישר AB

כך ש $DP \perp AB$

P על הישר AB

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



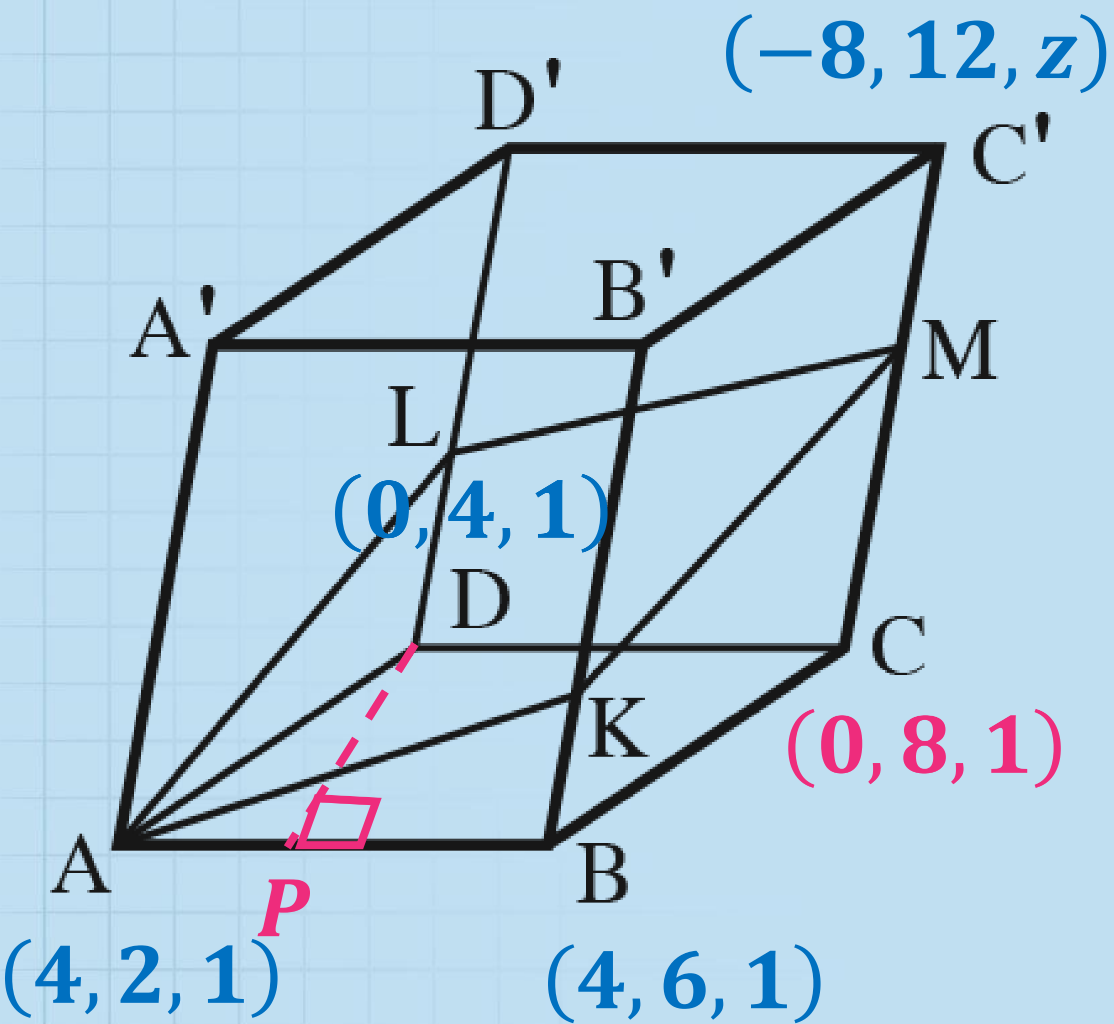
$$AB: \underline{x} = \underline{A} + s\overrightarrow{AB}$$

$$= (4,2,1) + t(0,1,0)$$

$$\boldsymbol{P = (4, 2 + t_P, 1)}$$

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון

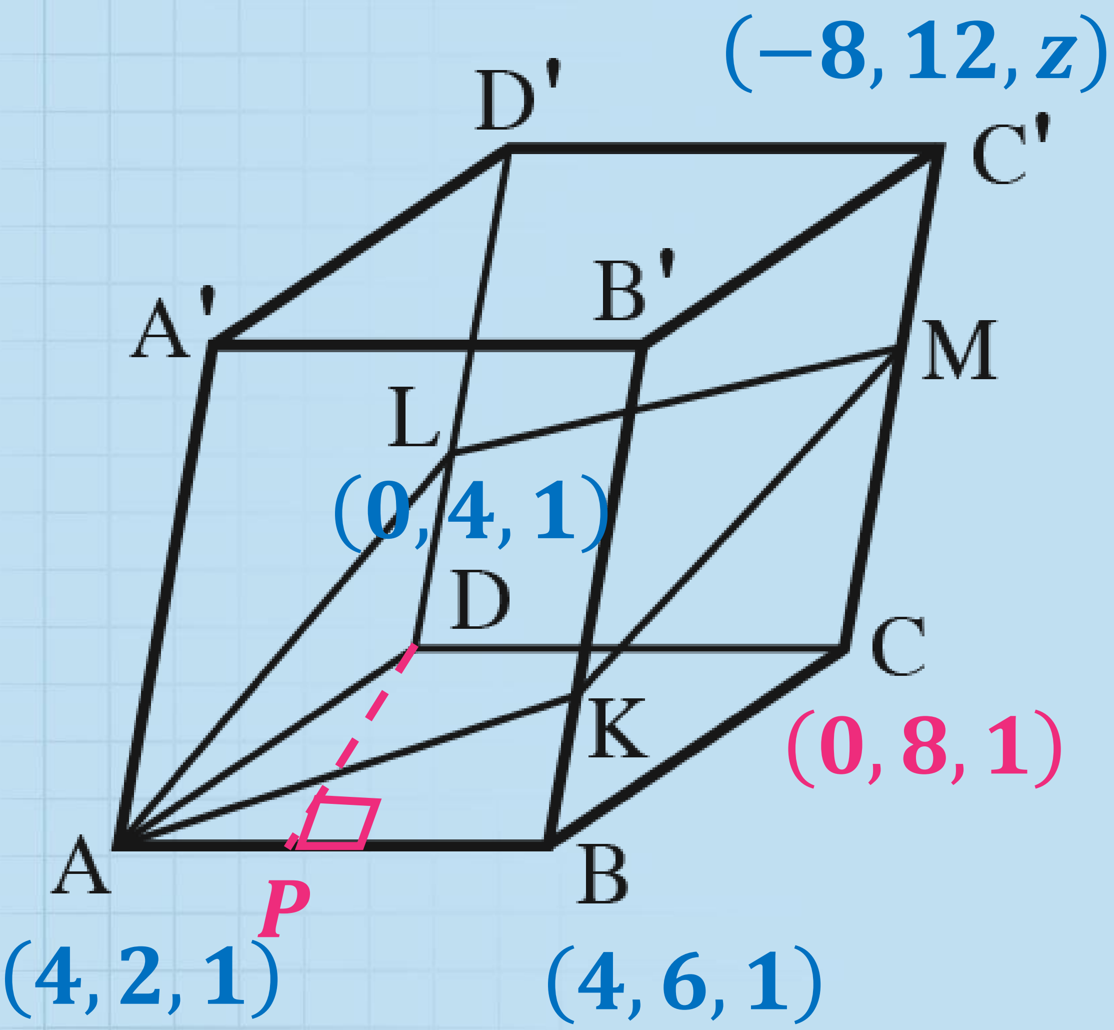


$$\overrightarrow{PD} = (4, 2 + t_P - 4, 1 - 1)$$

$$= (4, -2 + t_P, 0)$$

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



$$\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

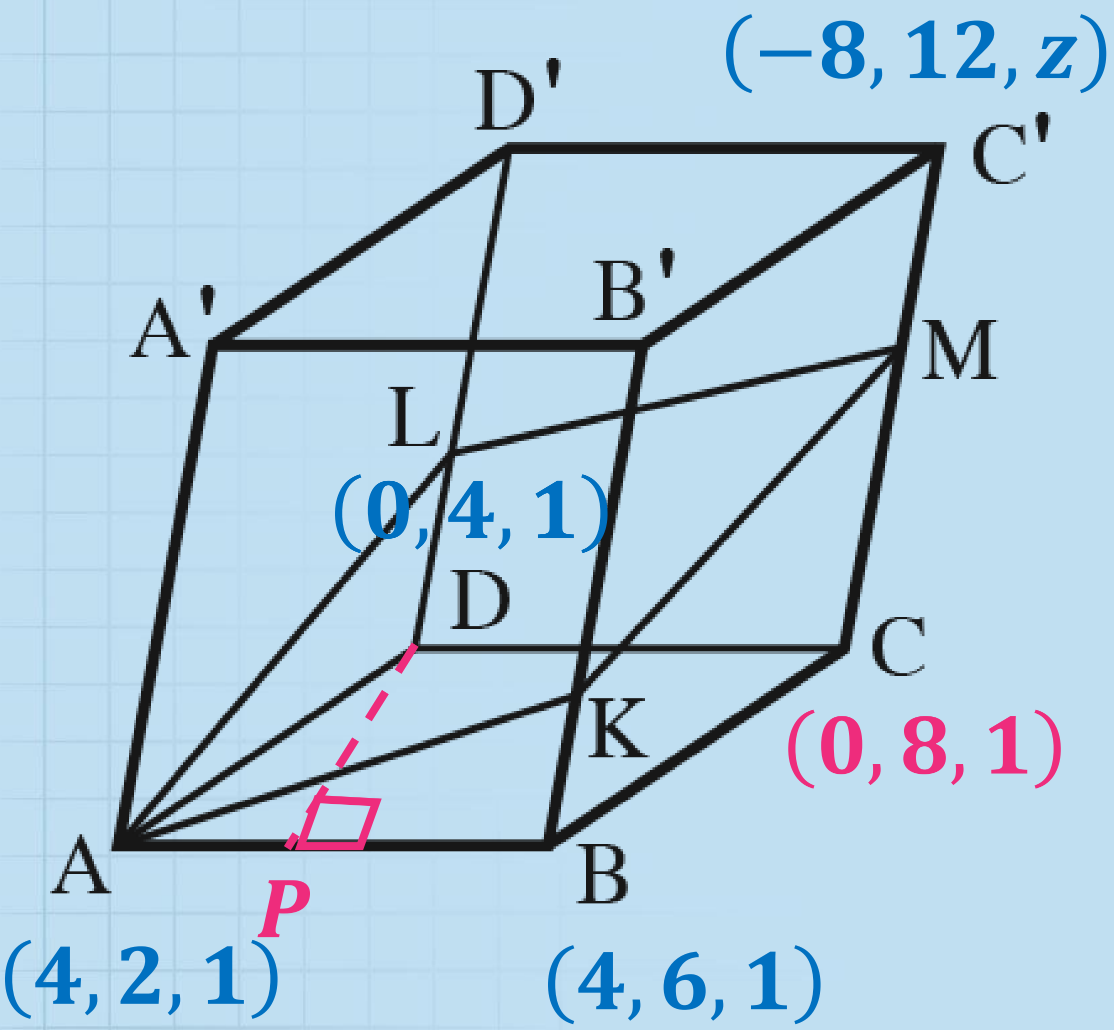
$$(4, -2 + t_P, 0) \cdot (0,1,0) = 0$$

$$-2 + t_P = 0$$

$$\boldsymbol{t_P = 2}$$

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



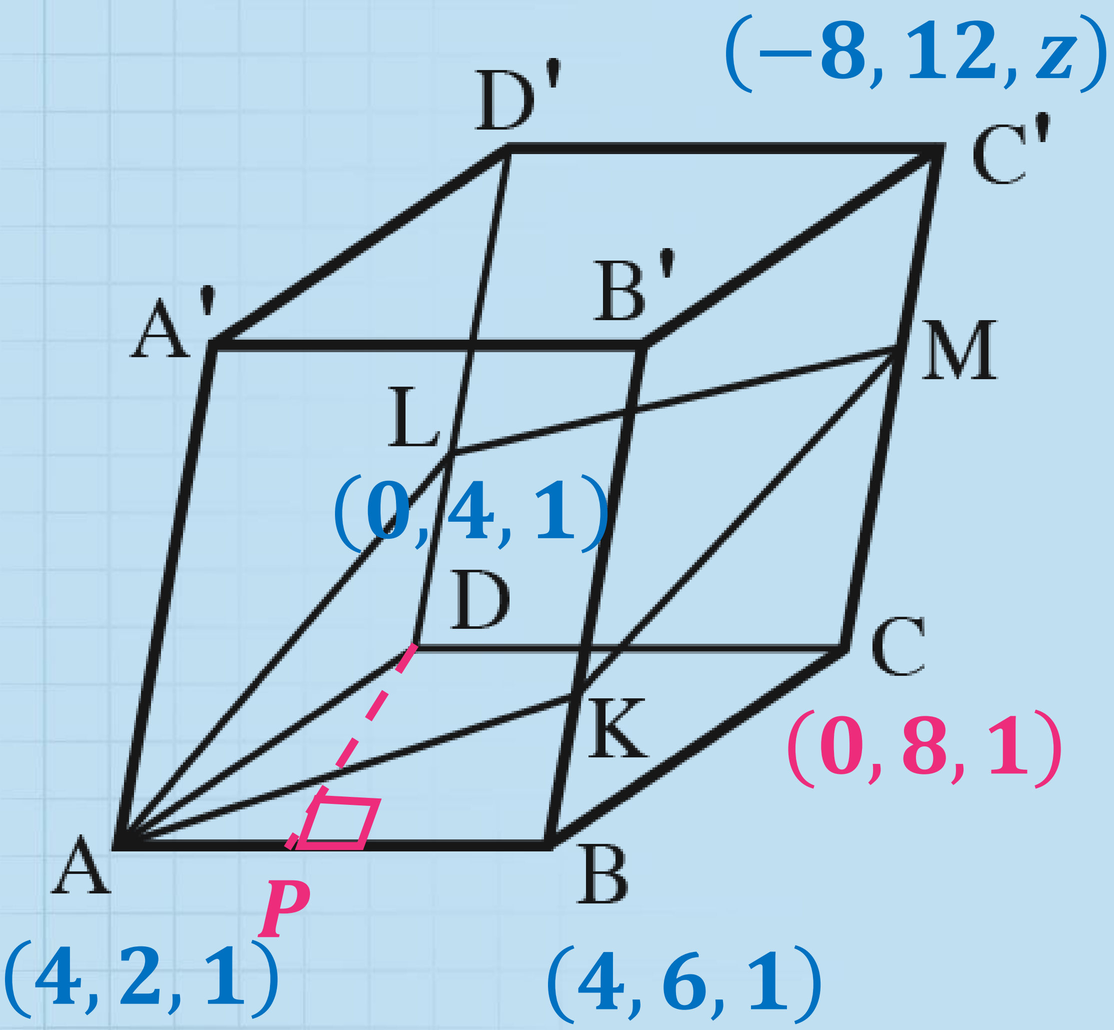
$$\overrightarrow{PD} = (4, -2 + t_P, 0)$$

$$= (4, -2 + 2, 0) = (4,0,0)$$

$$PD = \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = 4$$

ה. חשב את נפח הפירמידה MABCD.

פתרון



$$S_{ABCD} = 4 \cdot 4 = 16$$

$$\Downarrow$$

$$V = \frac{h \cdot S_{ABCD}}{3} = \frac{9 \cdot 16}{3} = 48$$

בהצלחה