פתרון תרגיל

וקטורים – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 626, ת. 12

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

12) נתונים שני ישרים: $\ell_1:\ \underline{x} = (1,-1,2)+t(k^2,k+1,-3)$

$\ell_2:\ \underline{x} = (2,1,1)+s(3,0,3k-2)$.

א. מצא לאילו ערכי k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור ה-k הקטן מבין שני ערכי k שמצאת בסעיף א' ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הוכח שהישרים מצטלבים.

(2) מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 והמאונך לישר ℓ_2.

$\ell_1:\ \underline{x} = (1,-1,2)+t(k^2,k+1,-3)$

$\ell_2:\ \underline{x} = (2,1,1)+s(3,0,3k-2)$.

א. מצא לאילו ערכי k הישרים מאונכים זה לזה.

פתרון

נדרוש:

$$(k^2,k+1,-3)\cdot(3,0,3k-2)=0$$

$$3k^2-9k+6=0$$

$$k^2-3k+2=0$$

$\boldsymbol{k=1}$ $\boldsymbol{k=2}$

ב. עבור ה-k הקטן מבין שני ערכי k שמצאת בסעיף א' $\ell_1: \underline{x} = (1,-1,2)+t(k^2,k+1,-3)$

(1) הוכח שהישרים מצטלבים. $\ell_2: \underline{x} = (2,1,1)+s(3,0,3k-2)$.

פתרון

$$k = 1$$

$$\ell_1: \underline{x} = (1,-1,2) + t(1,2,-3)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (2,1,1) + s(3,0,1)$$

כיווני הישרים אינם תלויים לינארית: $\frac{3}{1} \neq \frac{0}{2}$

הישרים נחתכים או מצטלבים

$\ell_1:\ \underline{x} = (1,-1,2)+t(k^2,k+1,-3)$

$\ell_2:\ \underline{x} = (2,1,1)+s(3,0,3k-2)$.

ב. עבור ה-k הקטן מבין שני ערכי k שמצאת בסעיף א'

(1) הוכח שהישרים מצטלבים.

פתרון

נבדוק האם קיימת לישרים נקודה משותפת ע"י השוואה בין הנקודות האופייניות:

$$(1+t,-1+2t,2-3t)=(2+s,1,1+s)$$

קיבלנו מערכת של 3 משוואות עם 2 נעלמים

נבדוק האם קיים פתרון

ב. עבור ה-k הקטן מבין שני ערכי k שמצאת בסעיף א'
(1) הוכח שהישרים מצטלבים.

$\ell_1: \underline{x} = (1,-1,2)+t(k^2,k+1,-3)$

$\ell_2: \underline{x} = (2,1,1)+s(3,0,3k-2)$.

פתרון

$$(1+t,-1+2t,2-3t)=(2+s,1,1+s)$$

$$1+t=2+s \qquad -1+2t=1 \qquad 2-3t=1+s$$

$$\boldsymbol{s=0} \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{t=1}$$

עבור $t=1, s=0$

$$2-3\cdot 1 \neq 1+0$$

לישרים אין נקודה משותפת ולכן הם מצטלבים

(2) מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 והמאונך לישר ℓ_2.

$\ell_1: \underline{x} = (1,-1,2) + t(1,2,-3)$

$\ell_2: \underline{x} = (2,1,1) + s(3,0,1)$

פתרון

המישור **מאונך** לישר ℓ_2 ולכן כיוון הישר הוא צירוף לינארי של כיוון הנורמל של המישור

$$\vec{N} = (3,0,1)$$

משוואת המישור מהצורה:

$$3x + z + D = 0$$

(2) מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 והמאונך לישר ℓ_2.

$\ell_1: \underline{x} = (1,-1,2) + t(1,2,-3)$

$\ell_2: \underline{x} = (2,1,1) + s(3,0,1)$

פתרון

$$3x + z + D = 0$$

המישור מכיל את הישר ℓ_1 ובפרט את הנקודה $(1,-1,2)$ שעליו,
ולכן היא מקיימת את משוואתו:

$$3 \cdot 1 + 2 + D = 0$$

$$\boldsymbol{D = -5}$$

$$\boldsymbol{3x + z - 5 = 0}$$

בהצלחה