פתרון תרגיל

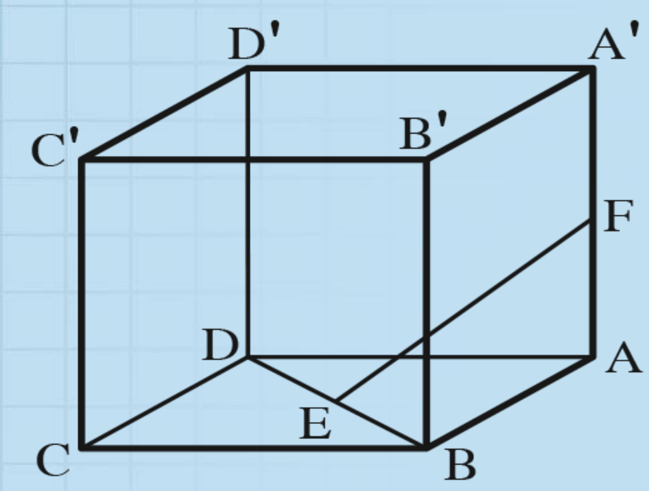
וקטורים גיאומטריים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 385, ת. 7

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה



7) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ הנקודה E היא אמצע אלכסון הבסיס BD והנקודה F היא אמצע המקצוע AA'.
הנקודה H היא אמצע הקטע FE. נתון: $\underline{u} = \overrightarrow{AD}$,
$\underline{v} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AA'}$.

א. בטא את $\overrightarrow{AH}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

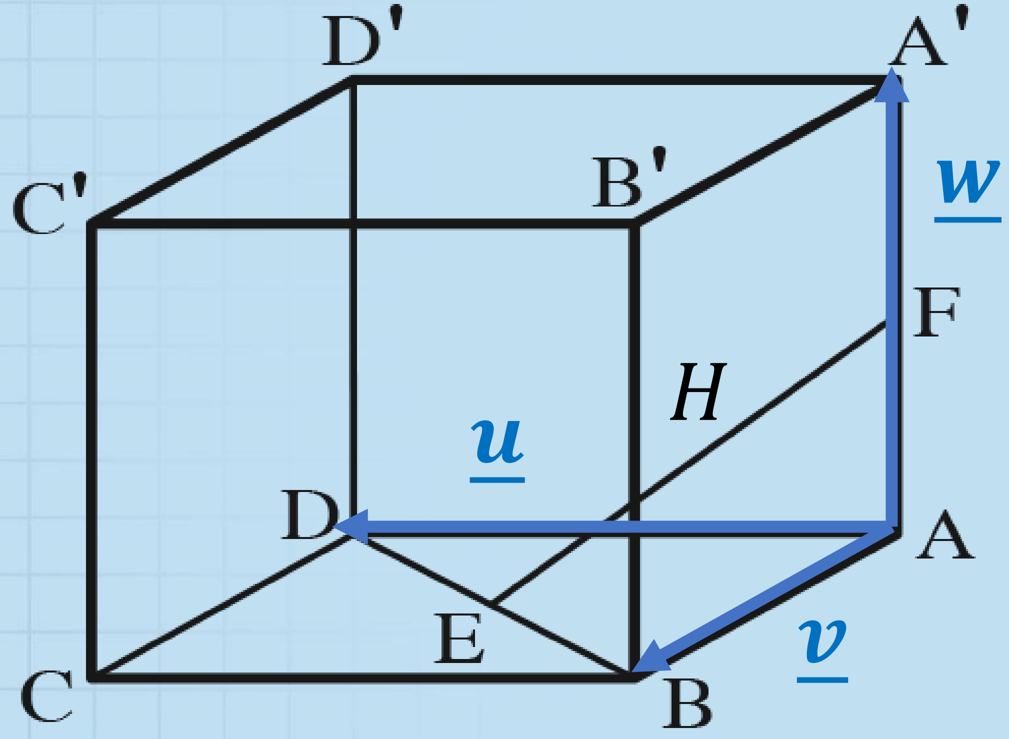
ב. הוכח שהנקודה H נמצאת על האלכסון AC'
וחשב את היחס $AH : HC'$.

ג. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שצלעו a, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH}$. בטא באמצעות a את הגובה של התיבה.

ד. נתון: שטח המשולש EHA הוא 16. חשב את הצלע a.

א. בטא את $\overrightarrow{AH}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

פתרון



E אמצע BD

F אמצע AA'

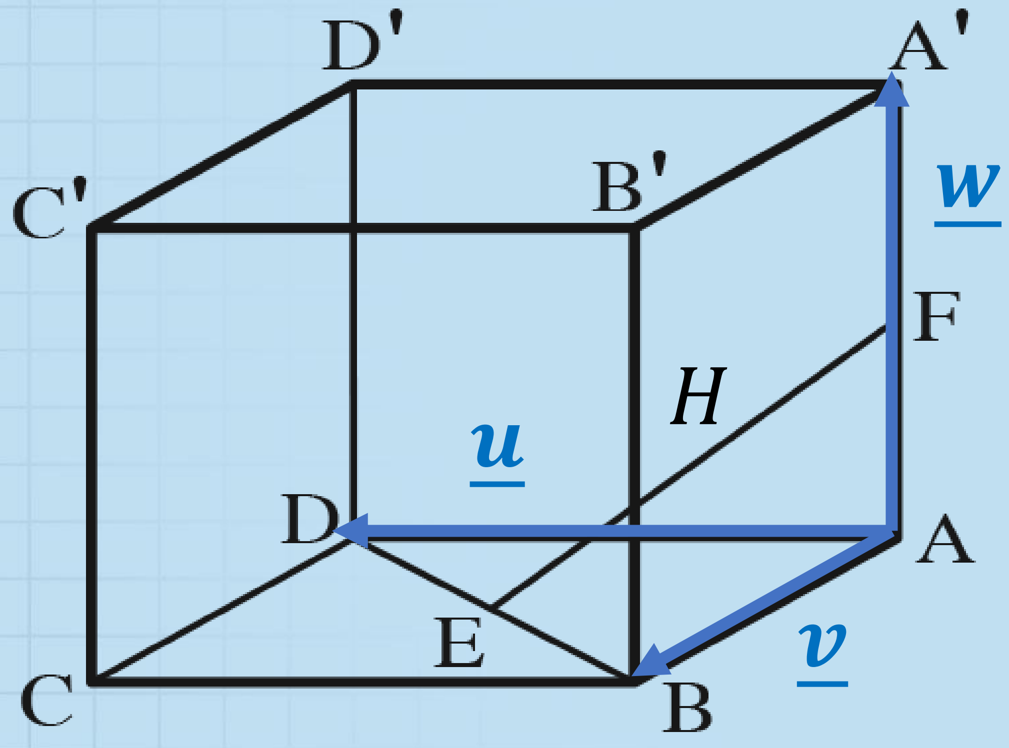
H אמצע EF

$\overrightarrow{AH}$ וקטור התיכון במשולש ΔEAF

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}\right)$$

א. בטא את $\overrightarrow{AH}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

פתרון



$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}\right)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\underline{w}$$

$\overrightarrow{AE}$ וקטור התיכון במשולש ΔDAB

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\underline{u} + \underline{v}\right)$$

א. בטא את $\overrightarrow{AH}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

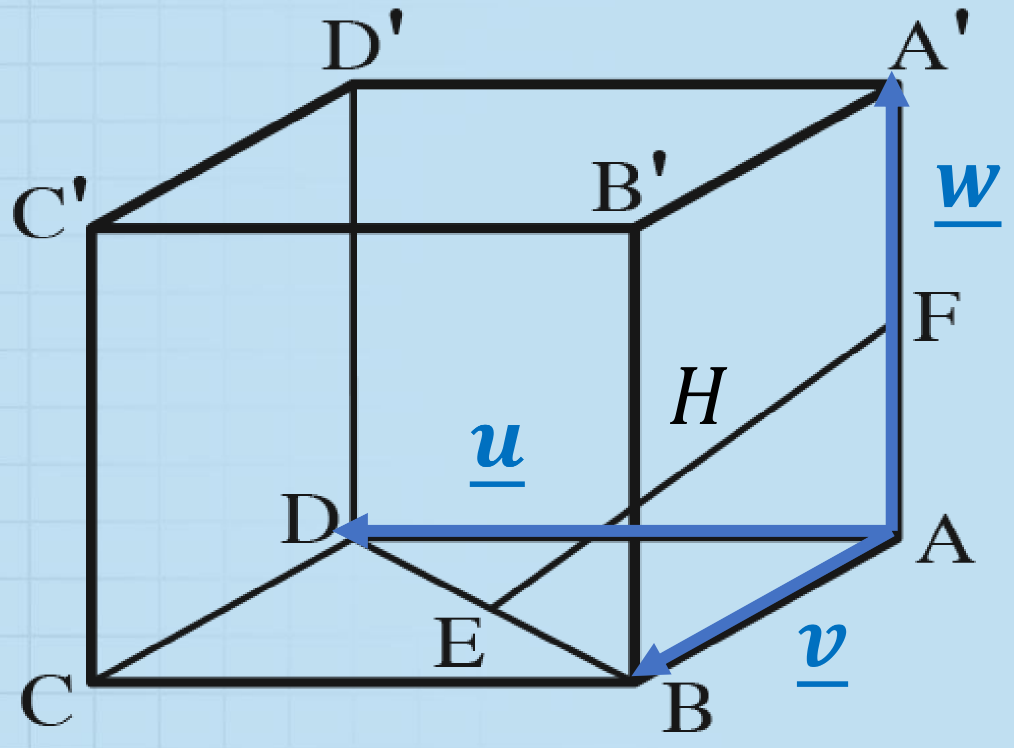
פתרון

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}\left(\underline{u} + \underline{v}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\left(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}\right)}$$

ב. הוכח שהנקודה H נמצאת על האלכסון AC' וחשב את היחס AH : HC'.

פתרון



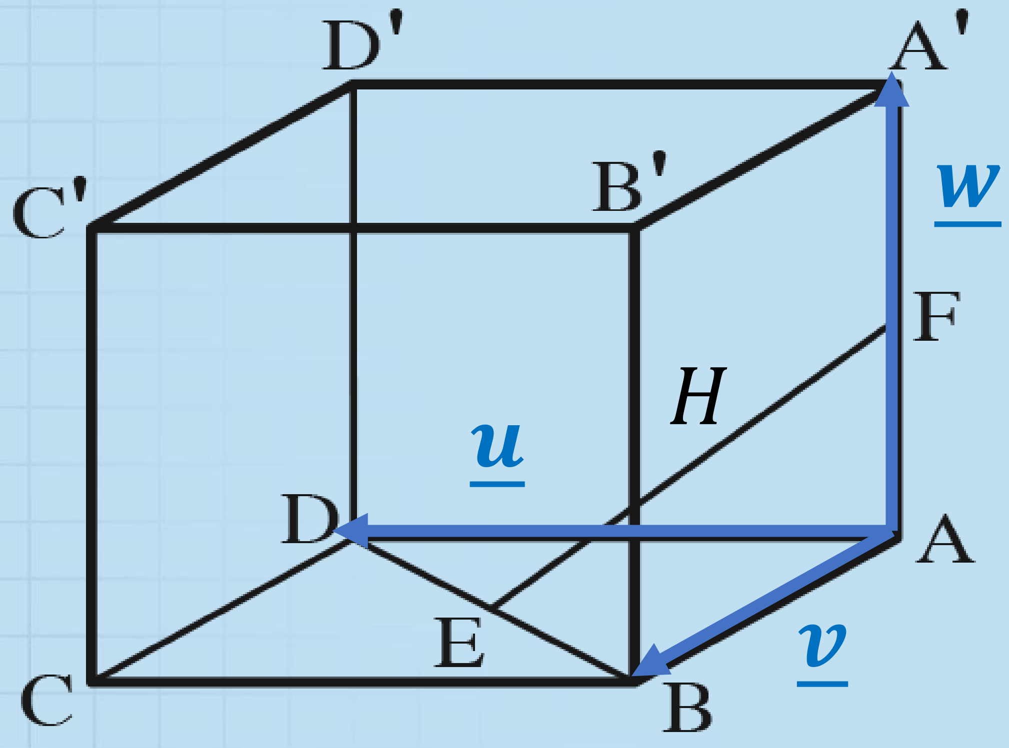
$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'C'}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$$

ב. הוכח שהנקודה H נמצאת על האלכסון AC' וחשב את היחס AH : HC'.

פתרון



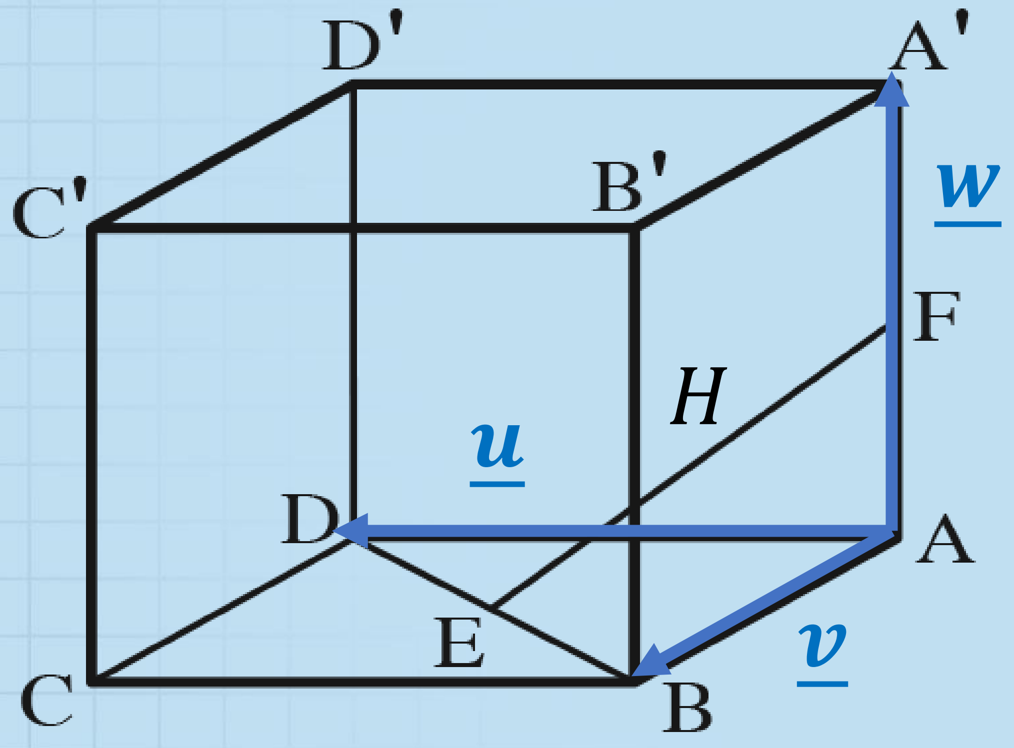
קיים סקלר $t=\frac{1}{4}$ כך ש: $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC'}$

הנקודה H על האלכסון AC'

הנקודה מחלקת את האלכסון ביחס $1:3$

ג.   נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שצלעו a, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH}$.   בטא באמצעות a את הגובה של התיבה.

פתרון



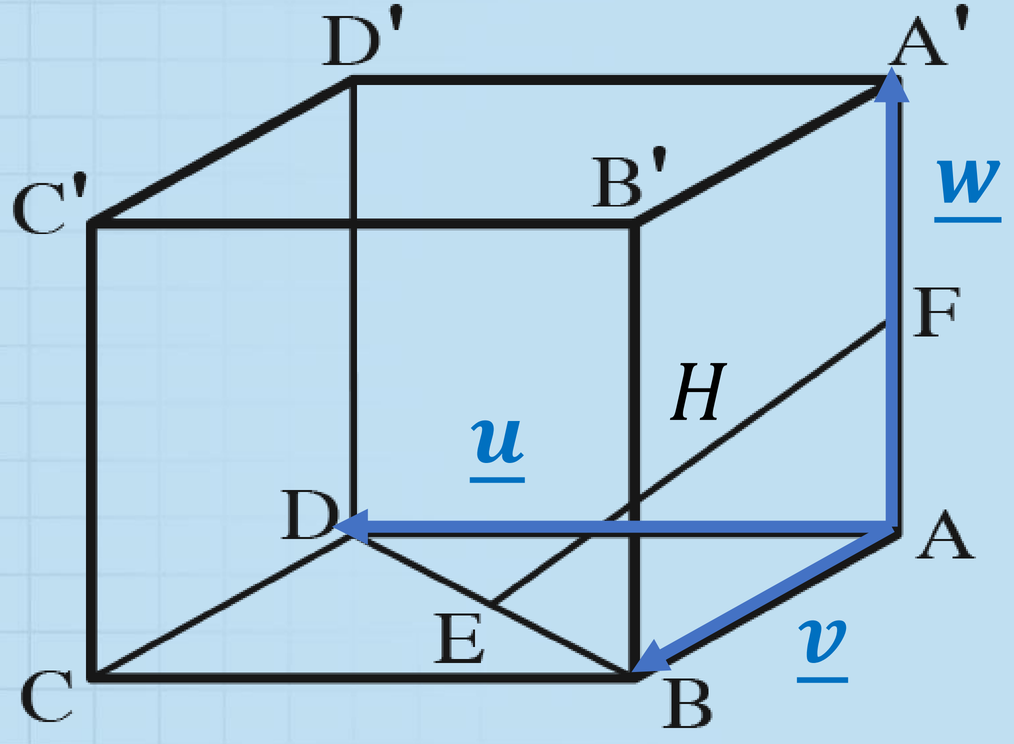
$$|\underline{u}| = |\underline{v}| = a$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$$

$$|\underline{w}| = ?$$

ג. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שצלעו a, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{FE}$. בטא באמצעות a את הגובה של התיבה.

פתרון



$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})$$

ג. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שצלעו a, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH}$. בטא באמצעות a את הגובה של התיבה.

פתרון

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AH}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{FE}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{1}{4}\left(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}\right) = 0$$

$$\left(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}\right) \cdot \left(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}\right) = 0$$

ג. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שצלעו a, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH}$. בטא באמצעות a את הגובה של התיבה.

פתרון

נתון תיבה:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u} \perp \underline{v} \\ \underline{u} \perp \underline{w} \\ \underline{v} \perp \underline{w} \end{array}\right\} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

ג. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שצלעו a, $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH}$. בטא באמצעות a את הגובה של התיבה.

פתרון

$$(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot(\underline{u}+\underline{v}-\underline{w})=0$$

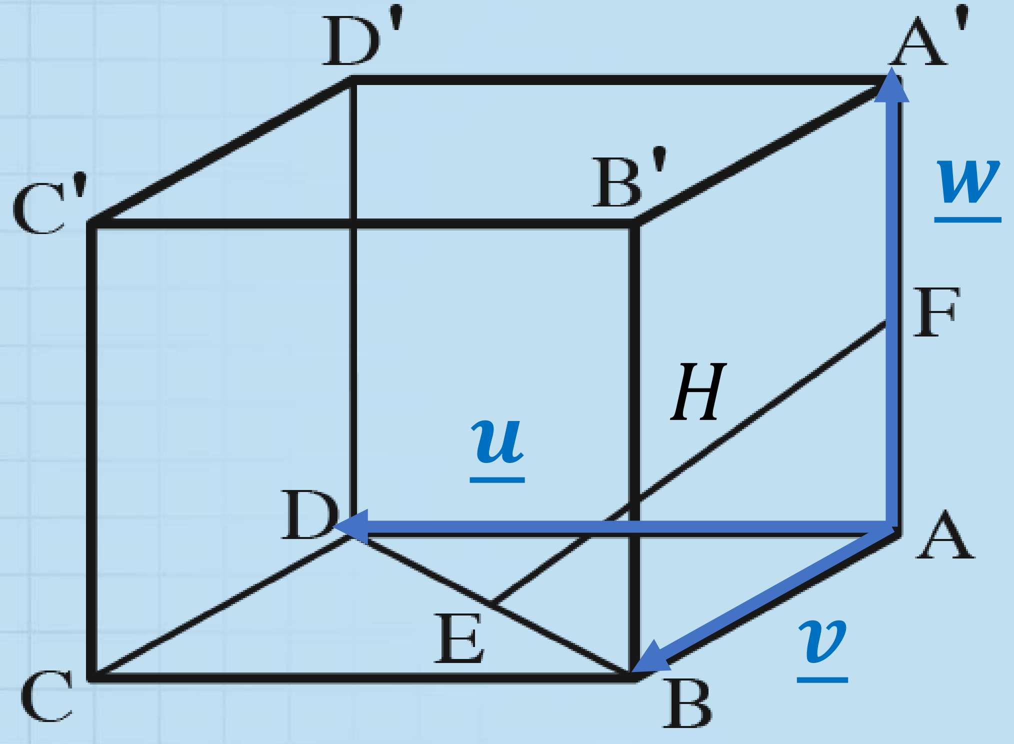
$$|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2-|\underline{w}|^2=2a^2-|\underline{w}|^2=0$$

$$|\underline{w}|^2=2a^2$$

$$|\underline{w}|=\sqrt{2}a$$

ד. נתון: שטח המשולש EHA הוא 16. חשב את הצלע a.

פתרון



נתון: $AH \perp EF$

$\Downarrow$

$$S_{\Delta EHA} = \frac{AH \cdot HE}{2}$$

ד. נתון: שטח המשולש EHA הוא 16. חשב את הצלע a.

פתרון

$$AH = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})\cdot\frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{|\underline{u}|^2+|\underline{v}|^2+|\underline{w}|^2} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2+a^2+(2a)^2} = \boldsymbol{\frac{a}{2}}$$

ד. נתון: שטח המשולש EHA הוא 16. חשב את הצלע a.

פתרון

$$HE=\frac{EF}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{EF}\right|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left|\underline{u}\right|^2+\left|\underline{v}\right|^2+\left|\underline{w}\right|^2}=\frac{1}{4}\sqrt{a^2+a^2+(2a)^2}=\boldsymbol{\frac{a}{2}}$$

ד. נתון: שטח המשולש EHA הוא 16. חשב את הצלע a.

פתרון

$$S_{\Delta EHA} = \frac{AH \cdot HE}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8} = 16$$

$$\boldsymbol{a = \sqrt{128}}$$

בהצלחה