פתרון תרגיל

טריגונומטריה במרחב

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 268, ת. 8

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

8) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

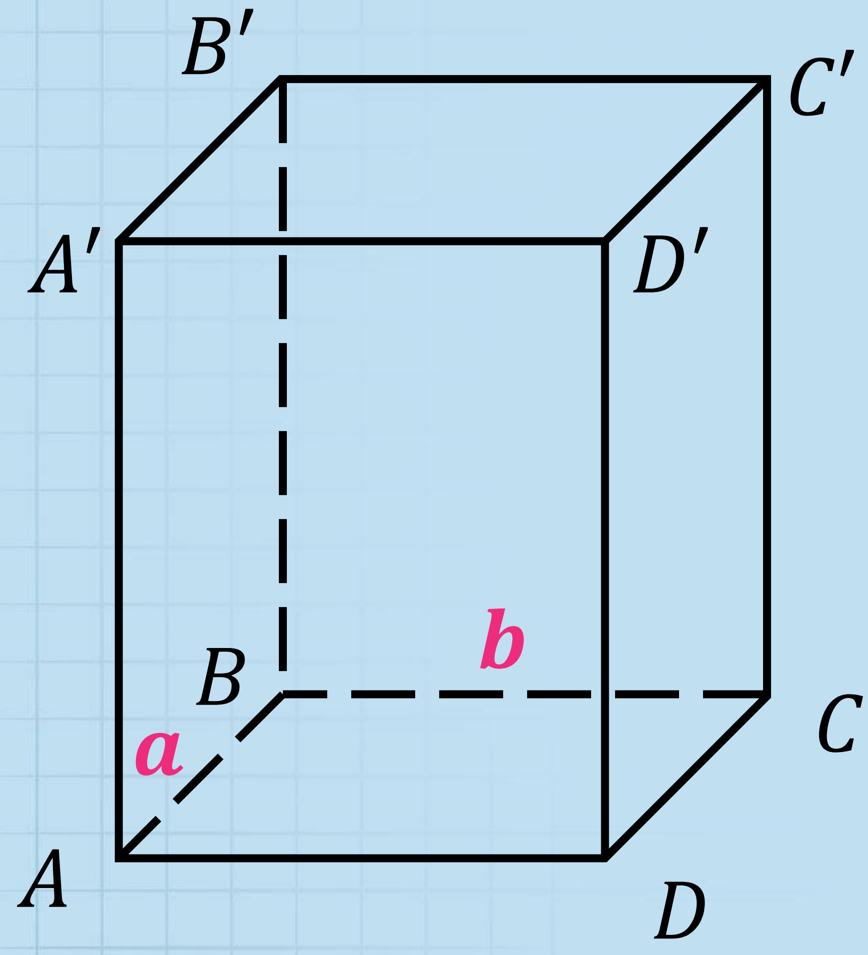
א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\operatorname{tg}\alpha \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ב. הוכח ששטח המשולש $AB'C$ הוא: $\dfrac{ab}{2\cos\alpha}$.

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



נשרטט את נתוני השאלה:

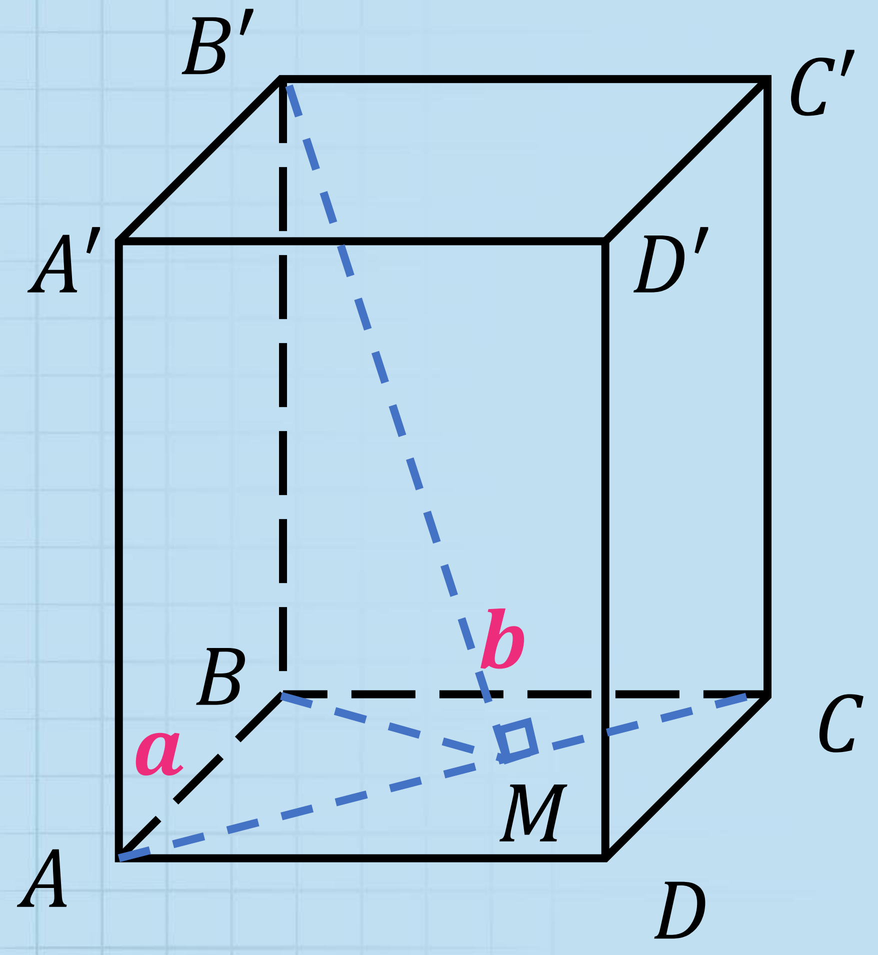
נזהה את הזווית α

זווית בין שני מישורים מוגדרת כזווית הנוצרת
בין שני האנכים לישר החיתוך,
היוצאים מאותה נקודה,
המשתייכים לשני המישורים בהתאמה

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



ישר החיתוך: AC

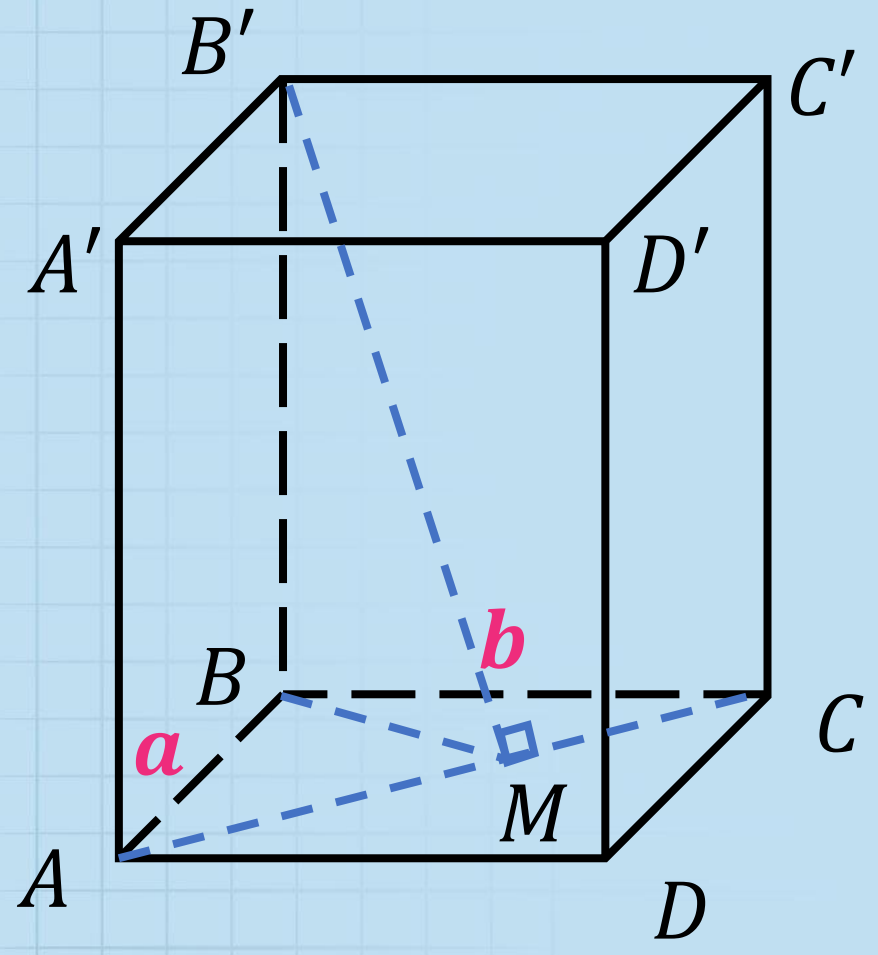
בניית עזר: $B'M \perp AC$

נוכיח: $BM \perp AC$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



נוכיח: $BM \perp AC$

$B'M$ משופע למישור $ABCD$

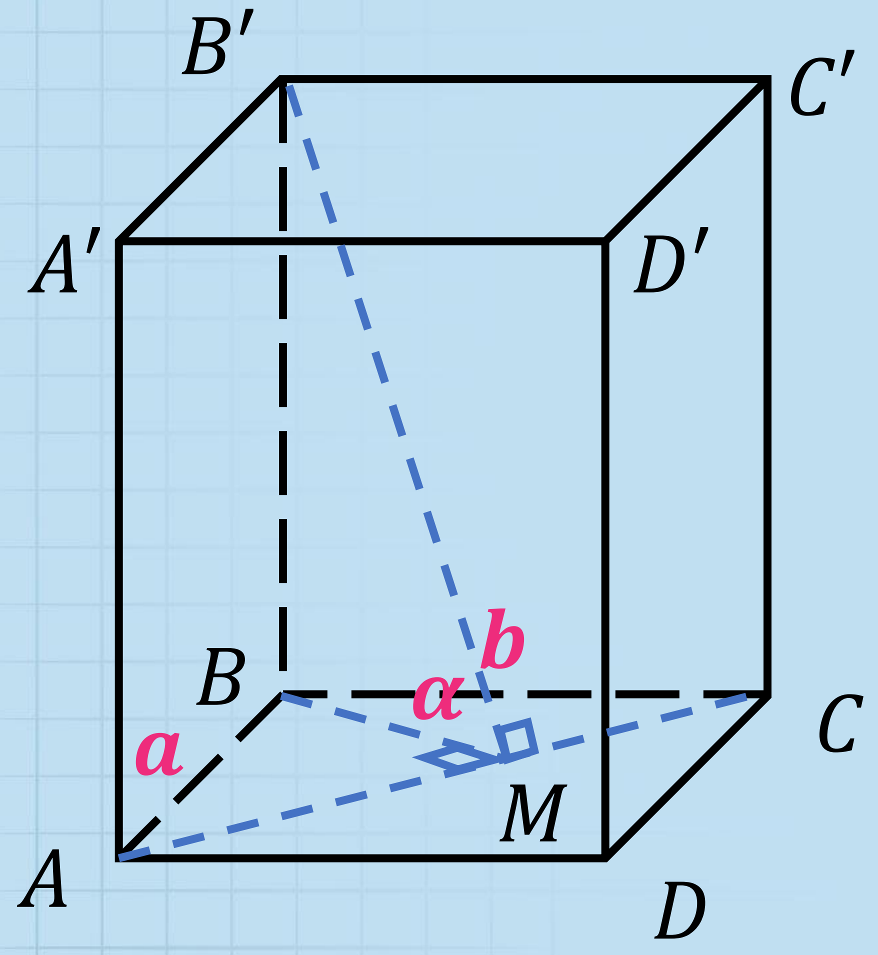
$ABCD \perp B'B$ מקצוע צדדי בתיבה

BM היטל המשופע $B'M$ במישור $ABCD$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



נוכיח: $BM \perp AC$

לפי בניית העזר, **המשופע** $B'M$ מאונך לישר AC

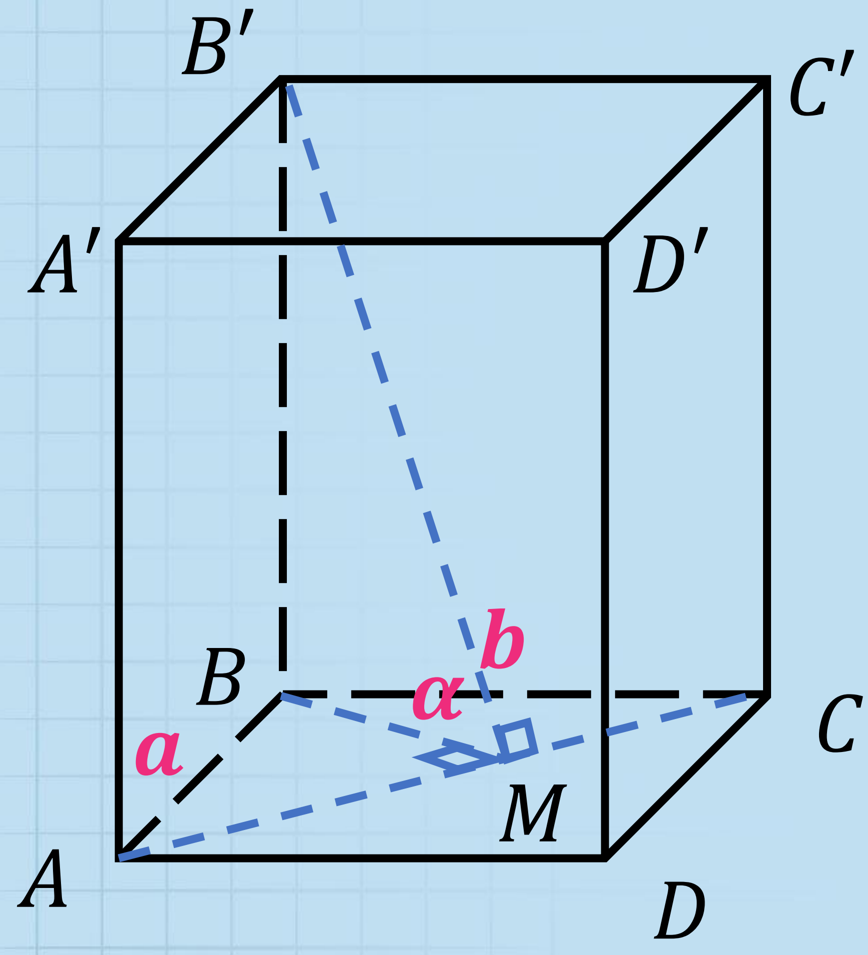
עפ"י משפט 3 האנכים, **היטל המשופע** BM גם הוא מאונך לישר AC

$\alpha = \sphericalangle B'MB$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זוית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{tg}\,\alpha$.

פתרון



$$V = S_{ABCD} \cdot h$$

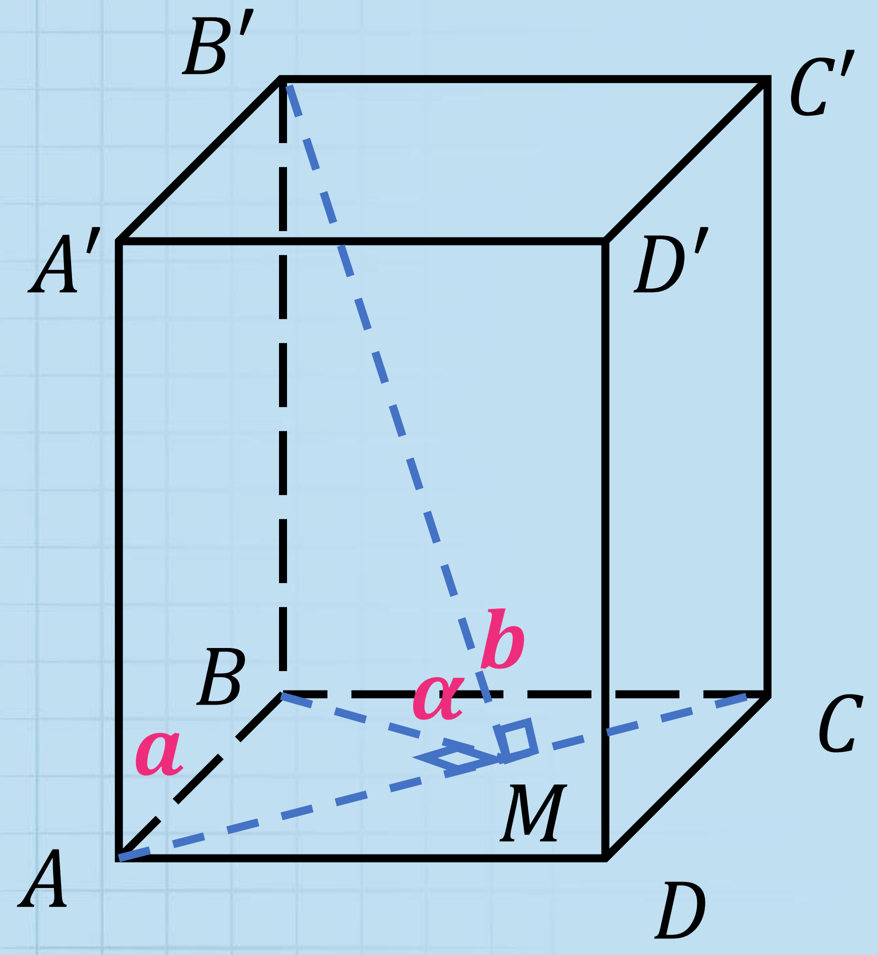
$$S_{ABCD} = ab$$

$$B'B = ?$$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



משולש $\Delta B'BM$ ישו"ז:

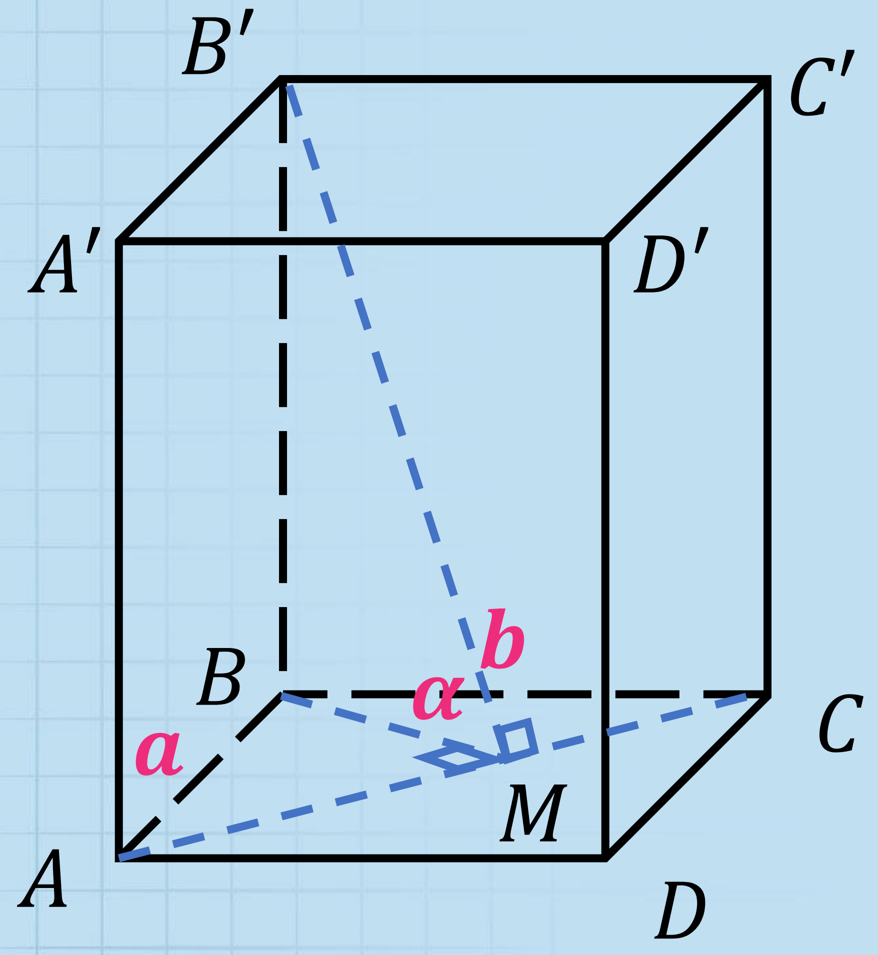
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B'B}{BM}$$

$$B'B = BM \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



משולש ΔABC ישר״ז:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{BM \cdot AC}{2}$$

משפט פיתגורס:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{tg}\,\alpha$.

פתרון

$$ab = BM \cdot AC$$

$$ab = BM \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\boldsymbol{BM = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זוית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

א. הוכח שנפח התיבה הוא: $\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}tg\,\alpha$.

פתרון

$\Downarrow$

$$B'B = BM \cdot tg\,\alpha = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot tg\,\alpha$$

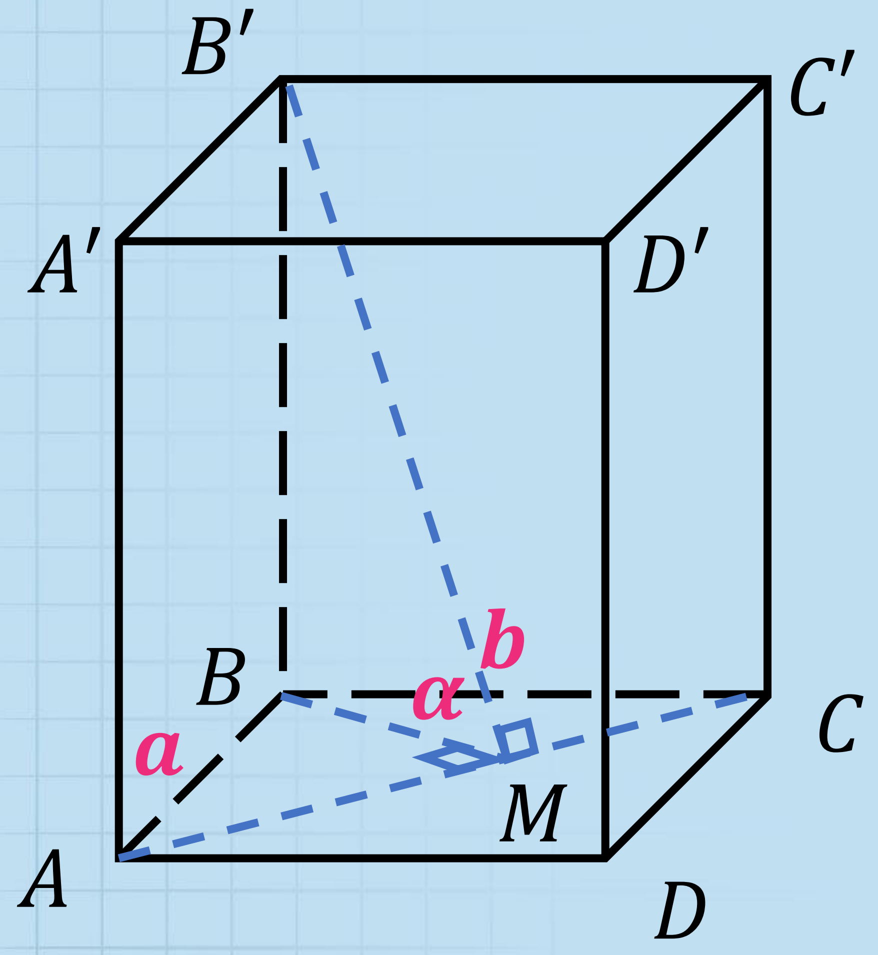
$\Downarrow$

$$V = S_{ABCD} \cdot h = ab \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot tg\,\alpha = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot tg\,\alpha$$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זווית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

ב. הוכח ששטח המשולש $AB'C$ הוא: $\frac{ab}{2\cos\alpha}$.

פתרון



$$S_{\Delta AB'C} = \frac{B'M \cdot AC}{2}$$

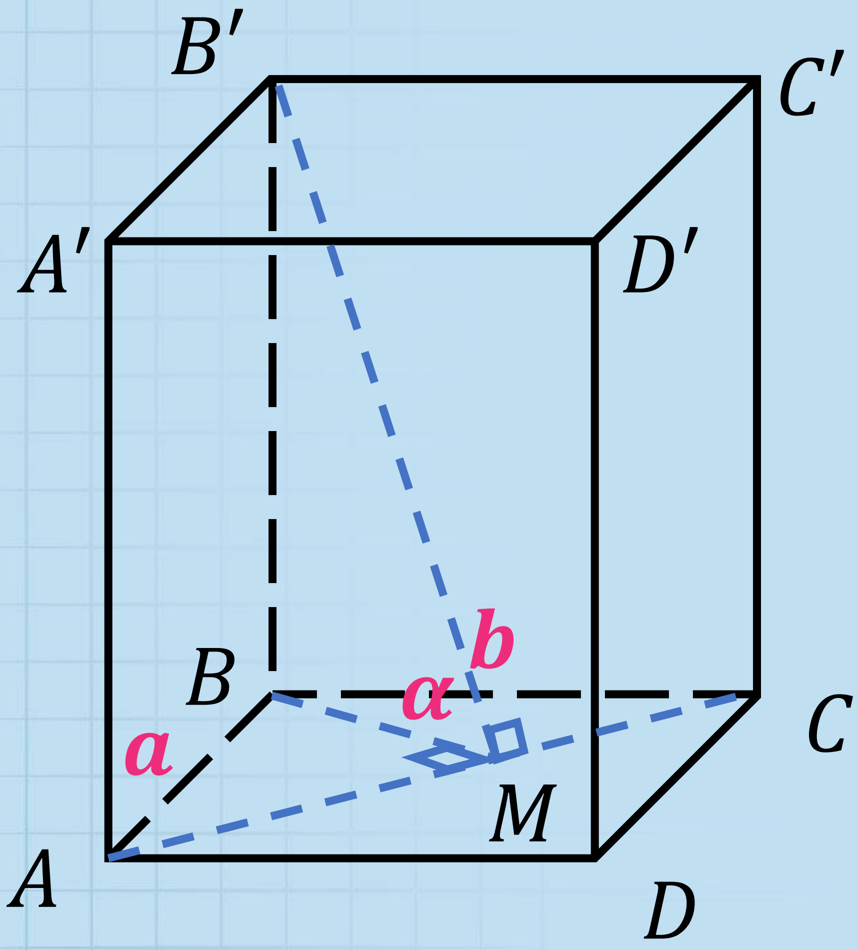
$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$B'M = ?$$

בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: AB = a, BC = b. המישור AB'C יוצר זווית α עם בסיס התיבה ABCD.

ב. הוכח ששטח המשולש AB'C הוא: $\frac{ab}{2\cos\alpha}$.

פתרון



משולש $\Delta B'BM$ ישר״ז:

$$\cos\alpha = \frac{BM}{B'M}$$

$$B'M = \frac{BM}{\cos\alpha} = \frac{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha}$$

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = a$, $BC = b$. המישור $AB'C$ יוצר זוית α עם בסיס התיבה $ABCD$.

ב. הוכח ששטח המשולש $AB'C$ הוא: $\frac{ab}{2\cos\alpha}$.

פתרון

$$S_{\Delta AB'C} = \frac{B'M \cdot AC}{2} = \frac{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha} \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{ab}{2\cos\alpha}$$

בהצלחה