פתרון תרגיל

בעיות קיצון – תרגילים לחזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 475, ת. 9

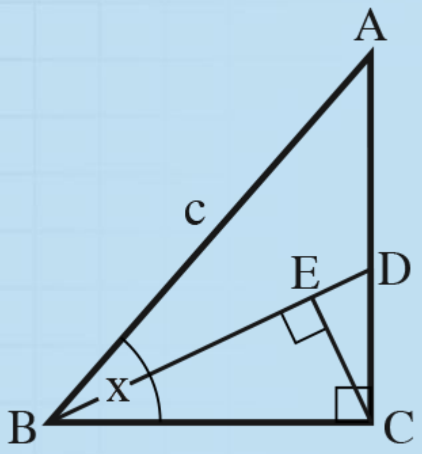
המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים

השאלה

9) ABC הוא משולש ישר זווית שבו $\sphericalangle ACB = 90^{\circ}$.
BD הוא חוצה הזווית ABC. CE הוא אנך ל-BD.
(E נמצאת על BD). נתון: $AB = c$.
נסמן: $\sphericalangle ABC = x$.

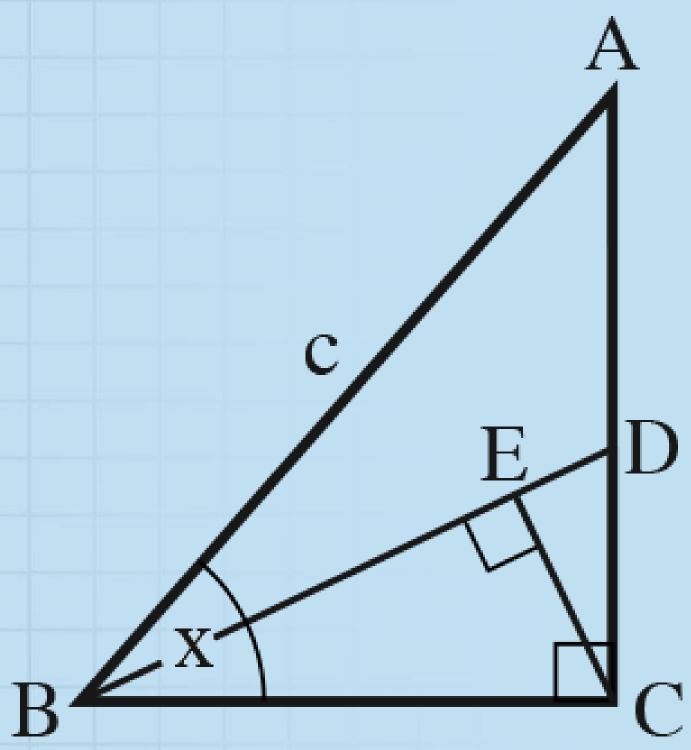
א. חשב מה צריך להיות גודל הזווית x כדי שאורך הקטע CE יהיה מקסימלי.

ב. נסמן ב-$f(x)$ את הפונקציה שמייצגת את אורך הקטע CE כאשר $\sphericalangle ABC = x$ ו-$c = 1$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$.



א. חשב מה צריך להיות גודל הזווית x כדי שאורך הקטע CE יהיה מקסימלי.

פתרון



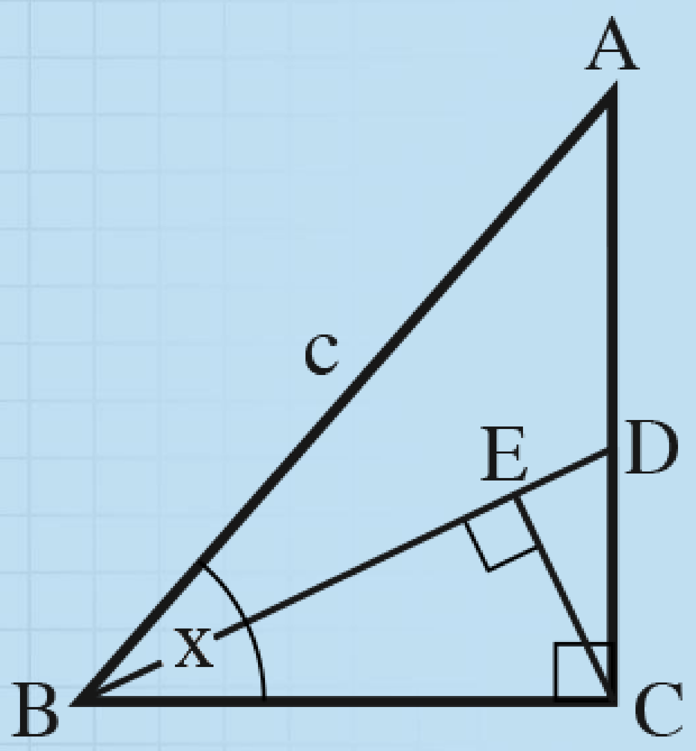
$$\Delta ABC: \quad \cos x = \frac{BC}{c} \quad BC = c \cdot \cos x$$

$$\Delta EBC: \quad \sin\frac{x}{2} = \frac{CE}{BC} \quad CE = BC \cdot \sin\frac{x}{2}$$

$$CE = c \cdot \cos x \sin\frac{x}{2}$$

א. חשב מה צריך להיות גודל הזוית x כדי שאורך הקטע CE יהיה מקסימלי.

פתרון



$$CE = f(x) = c \cdot \cos x \sin \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = c\left(-\sin x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}\cos x\right)$$

$$c\left(-\sin x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}\cos x\right) = 0$$

$$-2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}\cos x = 0$$

א. חשב מה צריך להיות גודל הזווית x כדי שאורך הקטע CE יהיה מקסימלי.

פתרון

$$\cos\frac{x}{2}\left(-2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right)=0$$

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\cancel{\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k}$$

$$-2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$$

א. חשב מה צריך להיות גודל הזוית x כדי שאורך הקטע CE יהיה מקסימלי.

פתרון

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{x}{2}=24.095^\circ+360^\circ k$$

$$\boxed{x=48.19^\circ}$$

$$\cancel{\frac{x}{2}=155.905^\circ+360^\circ k}$$

ב. נסמן ב-$f(x)$ את הפונקציה שמייצגת את אורך
הקטע CE כאשר $\sphericalangle ABC = x$ ו-$c = 1$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$.

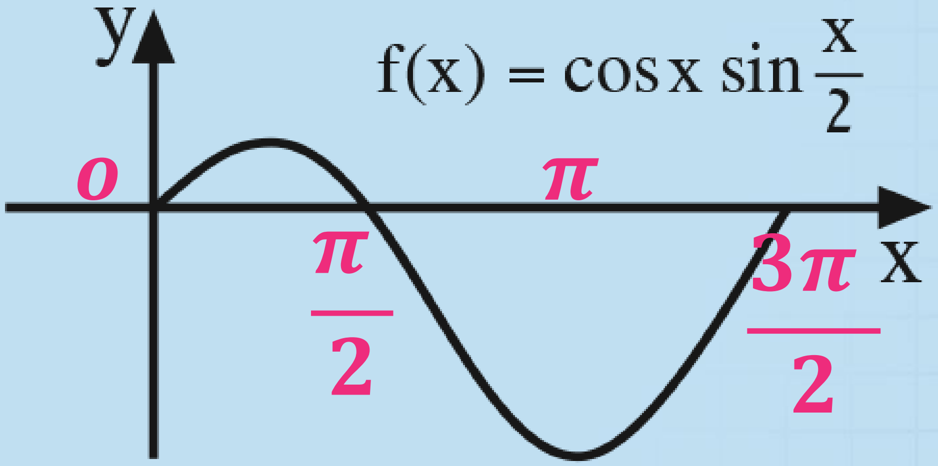
פתרון

$$CE = f(x) = 1 \cdot \cos x \sin \frac{x}{2}$$

$$\cos \frac{x}{2}\left(-2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right) = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \pi$$



ניתן להראות שזו נקי מינימום

בהצלחה