פתרון תרגיל

תרגילי חזרה – טריגונומטריה במישור

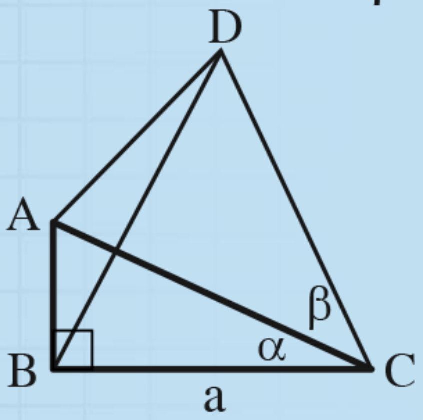
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 536, ת. 22

המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים

השאלה

22) ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle B = 90^\circ$). על היתר AC בנו (כלפי חוץ) משולש ACD שהוא שווה שוקיים ($AC = DC$) וזווית הראש שלו היא β ($\beta < 90^\circ$). נתון: $BC = a$, $\sphericalangle ACB = \alpha$ ($\alpha < 45^\circ$), $S_{BCD} = \frac{1}{2}a^2$.



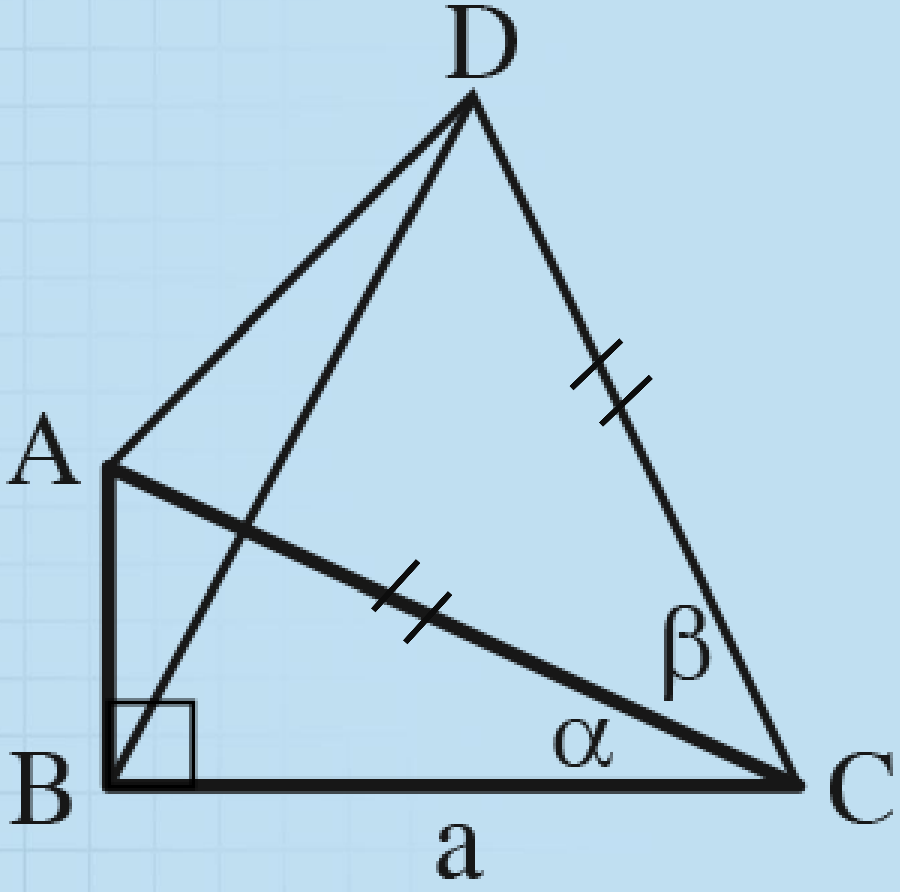
א. הבע את β בעזרת α.

ב. הראה שמתקיים: $BD^2 = a^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha} - 2a^2 \operatorname{tg}\alpha$.

ג. נתון גם: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. הבע באמצעות a את BD.

א. הבע את β בעזרת α.

פתרון



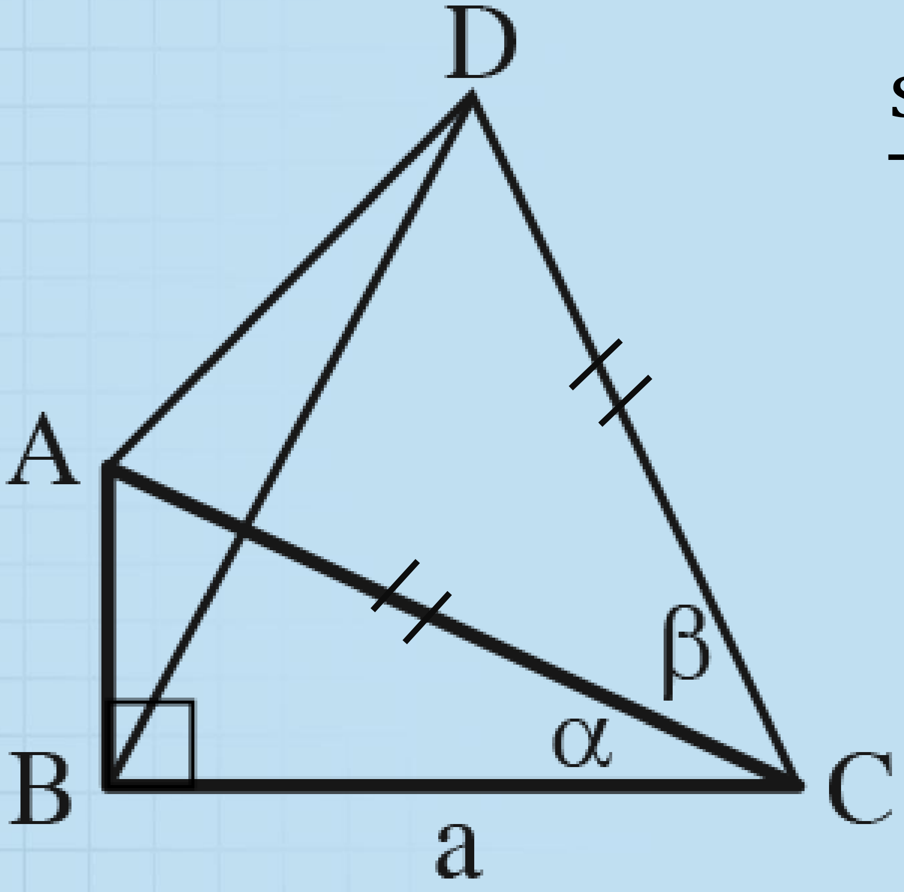
ΔABC:

$$AC = \frac{a}{\cos\alpha} = DC \qquad \cos\alpha = \frac{a}{AC}$$

$$S_{BCD} = \frac{a \cdot \frac{a}{\cos\alpha} \cdot \sin(\alpha+\beta)}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

א. הבע את β בעזרת α.

פתרון



$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=1 \qquad \sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(90°-\alpha)$$

$$\alpha+\beta=90°-\alpha$$

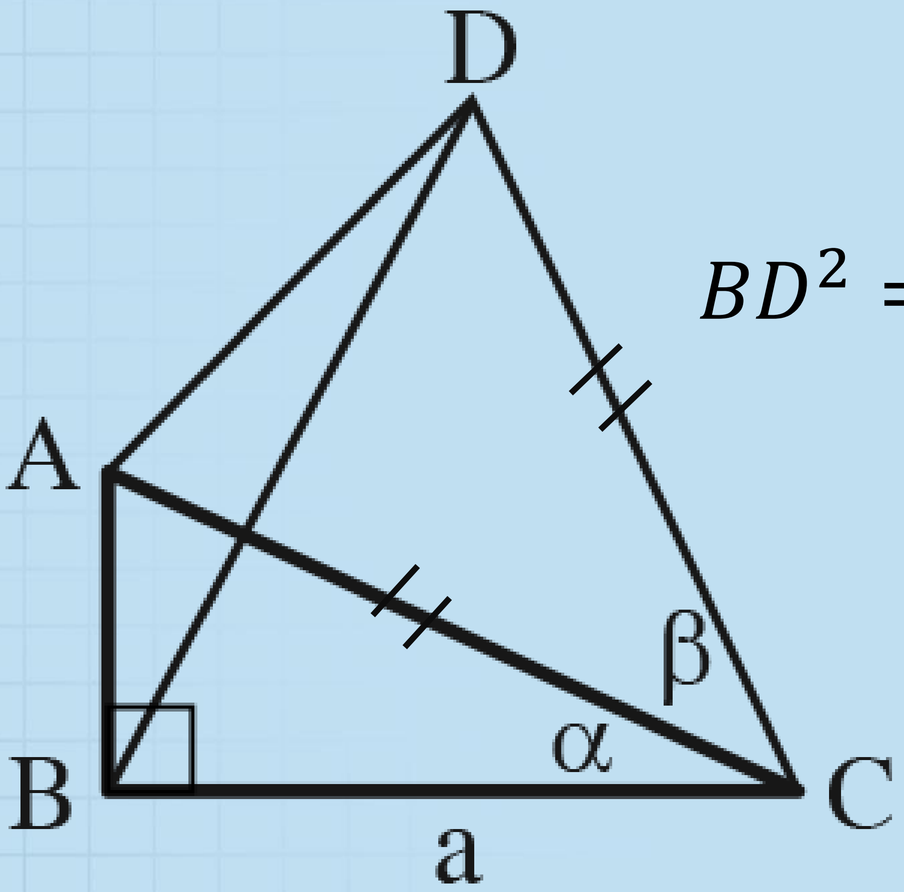
או

$$\alpha+\beta=180°-(90°-\alpha)=90°+\alpha$$

$$\boxed{\beta=90°-2\alpha}$$

ב. הראה שמתקיים: $BD^2 = a^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha} - 2a^2 \operatorname{tg}\alpha$.

פתרון



$\Delta BCD:$

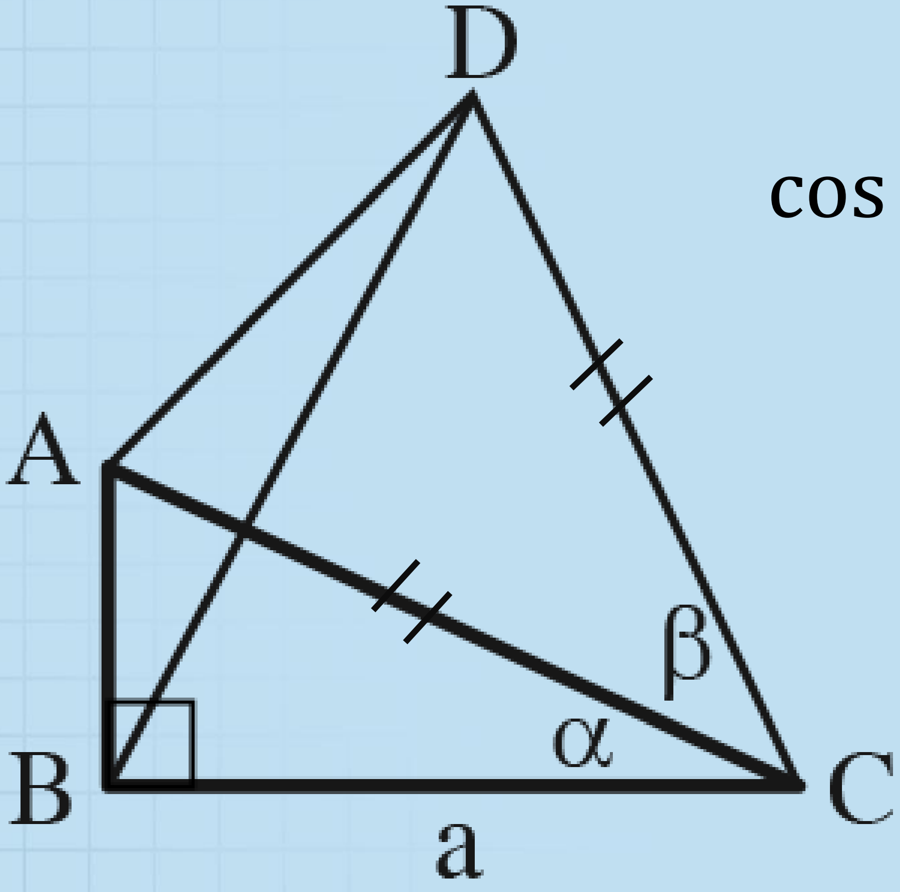
$$\alpha + \beta = 90° - \alpha$$

$$BD^2 = a^2 + \left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2 - 2a\frac{a}{\cos\alpha}\cos(90° - \alpha)$$

$$\boxed{BD^2 = a^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha} - 2a^2 \operatorname{tg}\alpha}$$

ג. נתון גם: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. הבע באמצעות a את BD.

פתרון



$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

ג. נתון גם: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. הבע באמצעות a את BD.

פתרון

$$BD^2 = a^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha} - 2a^2 \operatorname{tg}\alpha$$

$$BD^2 = a^2 + \frac{a^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} - 2a^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$BD^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$\boxed{BD = \frac{\sqrt{5}}{2}a}$$

בהצלחה