פתרון תרגיל

מעגל – משפט הסינוסים

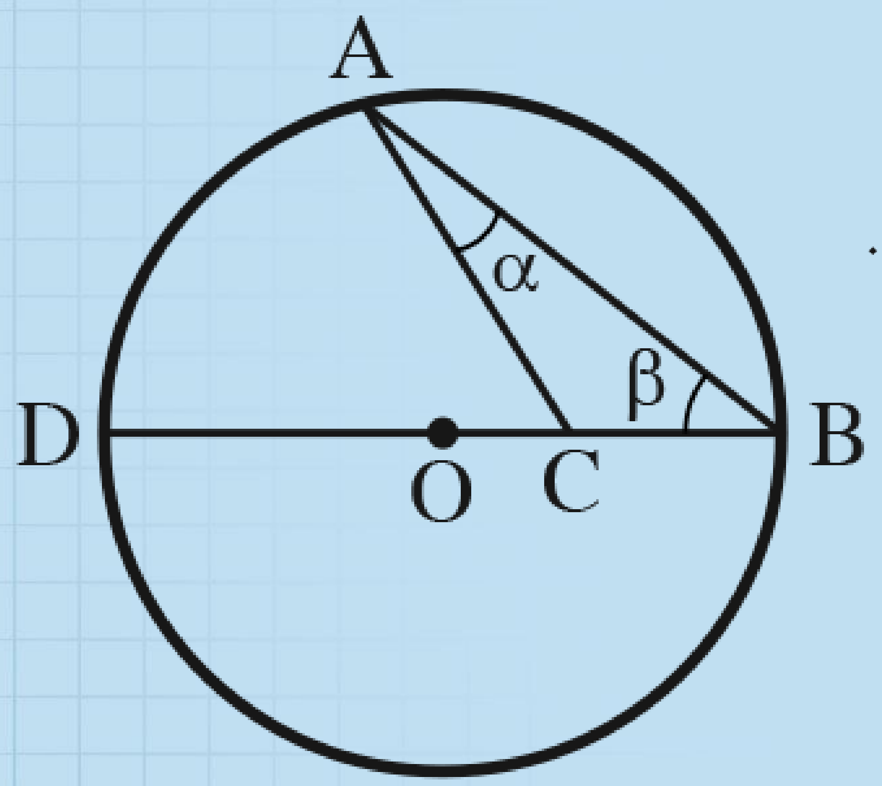
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–1

581 , עמ' 519, ת. 35

המצגת נערכה ע"י אבי בן נעים
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה

35) הקודקודים A ו-B של המשולש ABC נמצאים על היקף מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. הקודקוד C נמצא על קוטר BD. נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.



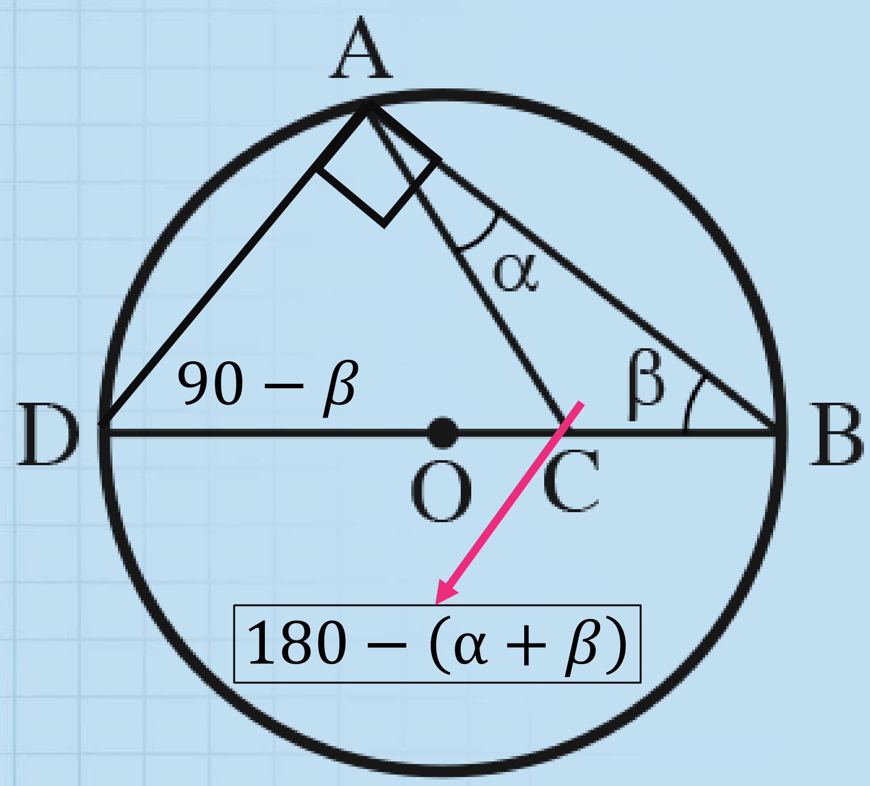
א. הבע באמצעות R, α ו-β את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות α ו-β את היחס בין שטח המשולש ABD לשטח המשולש ABC.

ג. נתון: $tg\alpha = a$, $tg\beta = b$. הבע את היחס הנ"ל באמצעות a ו-b.

א. הבע באמצעות R, α ו-β את שטח המשולש ABC.

פתרון



$\sphericalangle DAB = 90°$ זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°

ΔDAB

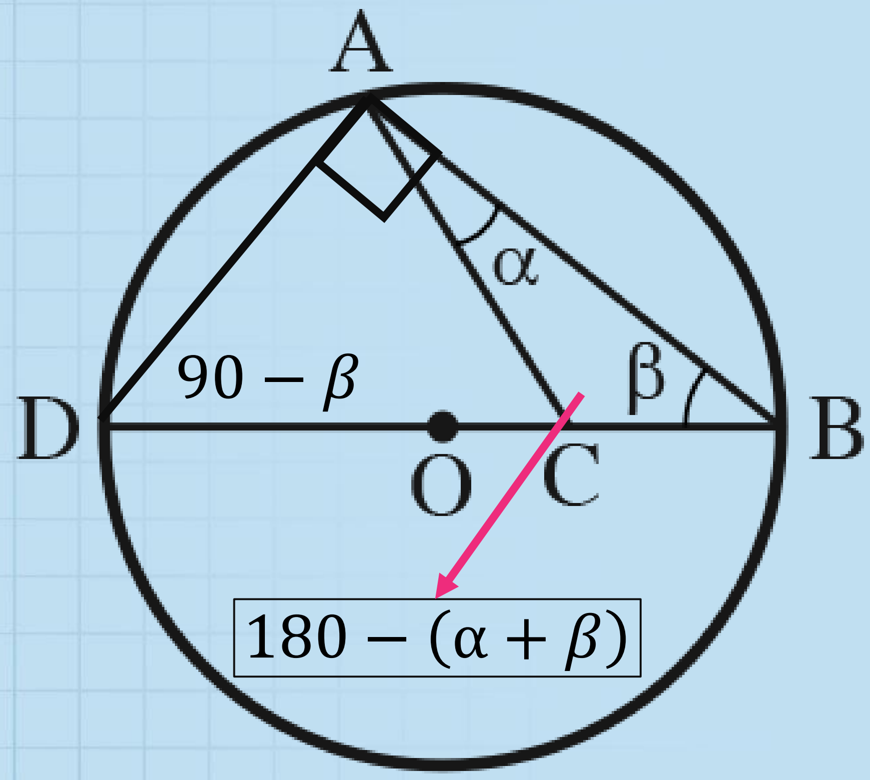
$$\frac{AB}{\sin(90-\beta)} = 2R$$ משפט הסינוסים

$$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$AB = 2R\cos\beta$$

א. הבע באמצעות R, α ו-β את שטח המשולש ABC.

פתרון



$$S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

$$\Delta ABC$$

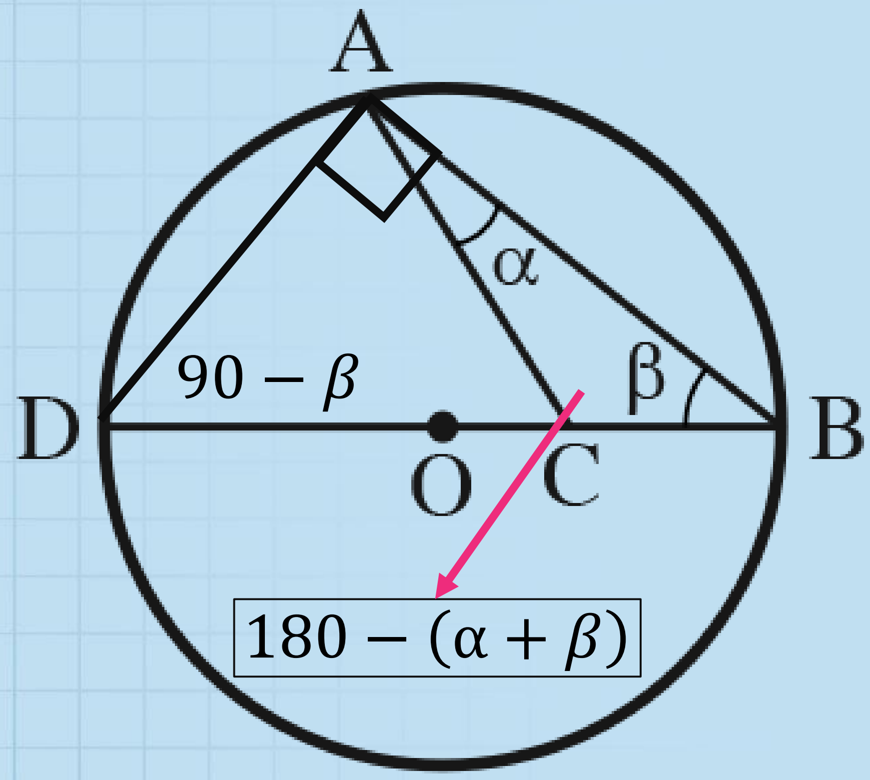
$$S = \frac{AB^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin[180-(\alpha+\beta)]}$$

$$S_{ABC} = \frac{2R^2 \cos^2\beta \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ב. הבע באמצעות α ו-β את היחס בין שטח המשולש ABD לשטח המשולש ABC.

פתרון

שטח משולש חסום במעגל



$$S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

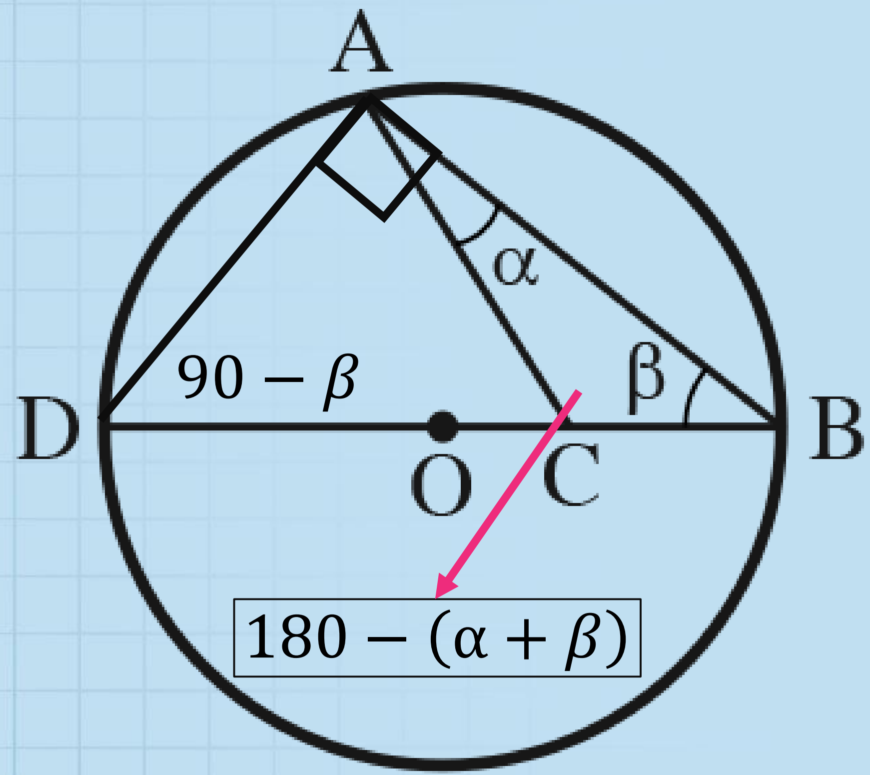
$$\Delta ABD$$

$$S = 2R^2 \sin\beta \sin(90-\beta) \sin 90°$$

$$S_{ABD} = 2R^2 \sin\beta \cos\beta$$

ב. הבע באמצעות α ו-β את היחס בין שטח המשולש ABD לשטח המשולש ABC.

פתרון

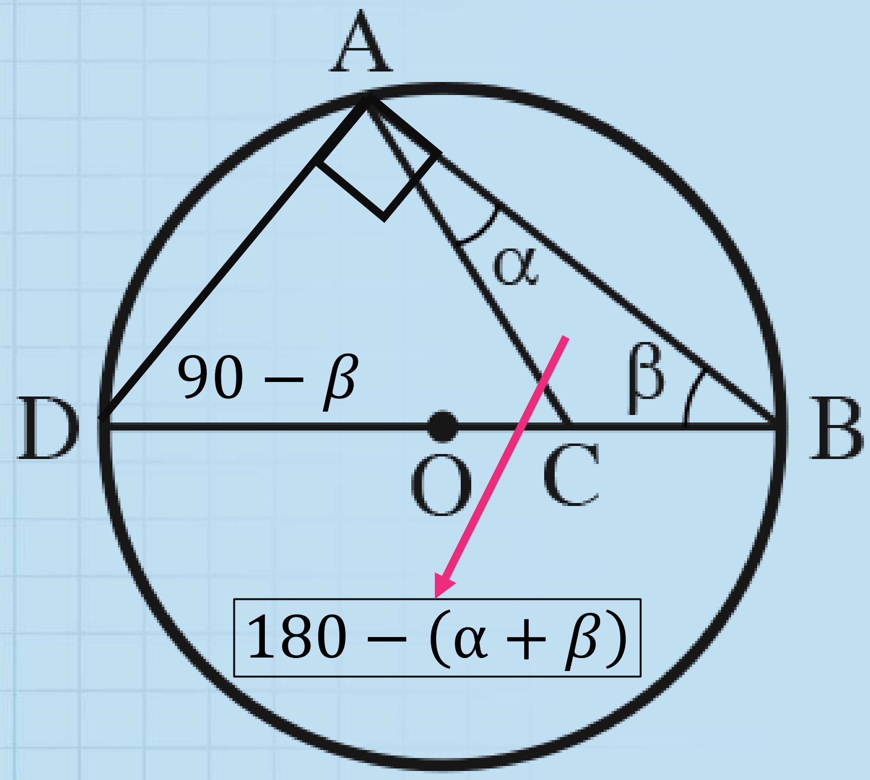


$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{\cancel{2R^2}\,\cancel{\sin}\,\beta\,\cancel{\cos}\,\beta}{\dfrac{\cancel{2R^2}\cos^{\cancel{2}}\beta\sin\alpha\,\cancel{\sin\beta}}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta\sin\alpha}$$

ג. נתון: $tg\alpha = a$, $tg\beta = b$. הבע את היחס הנ"ל באמצעות a ו-b.

פתרון



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta \sin\alpha}$$

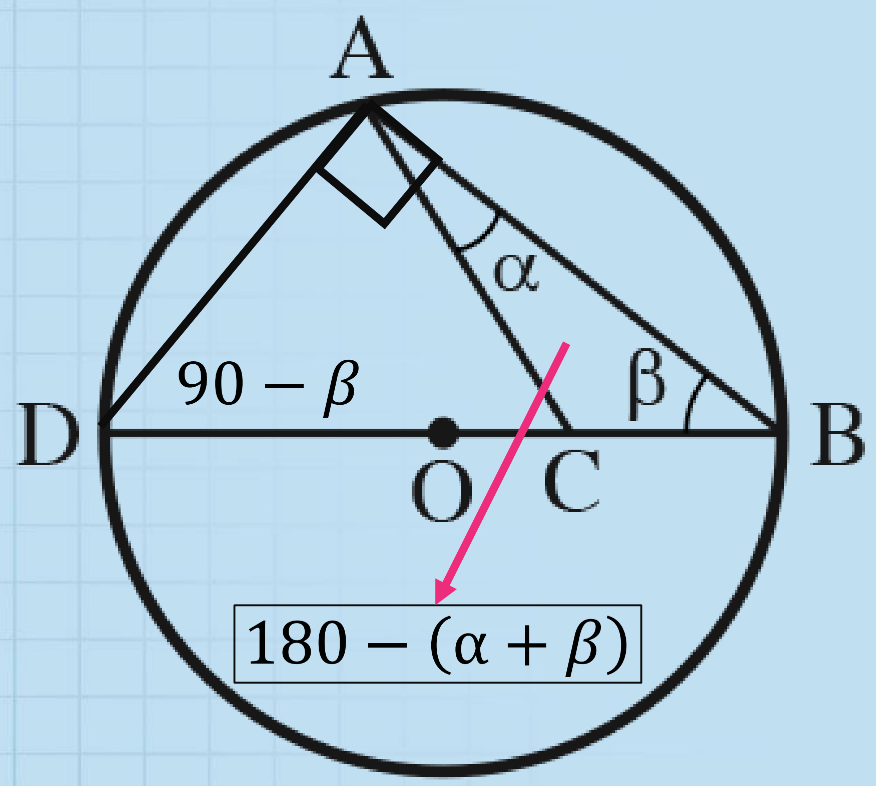
נתון: $tg\alpha = a$, $tg\beta = b$.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}$$

ג. נתון: $tg\alpha = a$, $tg\beta = b$. הבע את היחס הנ"ל באמצעות a ו-b.

פתרון



$\boxed{\text{נתון: } tg\alpha = a,\ tg\beta = b.}$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{\cancel{\sin\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\beta\sin\alpha}} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = 1 + \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{a+b}{a}$$

בהצלחה