הקנייה

האליפסה ככיווץ של המעגל

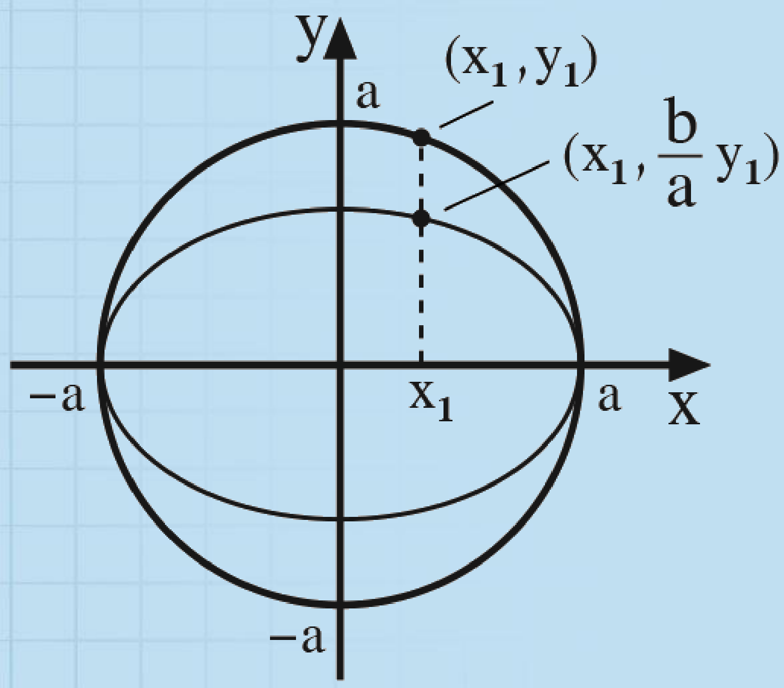
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 163–164

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

נתבונן במעגל $x^2+y^2=a^2$, נניח שנתון מספר b
כך שמתקיים $0<b<a$. כל נקודה (x_1, y_1) שעל
המעגל נחליף בנקודה $(x_1, \frac{b}{a}y_1)$, כלומר **נכפול** את
שיעור ה-y של כל נקודה שעל המעגל ב-$\frac{b}{a}$ ואת
שיעור ה-x של כל נקודה שעל המעגל נשאיר **ללא** שינוי.
נמצא את משוואת **המקום הגיאומטרי** המתקבל בדרך זו.
אם (x_1, y_1) היא נקודה על המעגל אז נסמן ב-(x, y)
את הנקודה המתאימה לה על המקום הגיאומטרי.



הקנייה

עפ"י מה שהגדרנו קיים $x = x_1$ ו-$y_1 = \frac{b}{a} y$. ברצוננו למצוא **משוואה המקשרת** בין x ל-y. נסתמך על כך שבין x_1 ו-y_1 **קיימת** משוואה מקשרת והיא **משוואת המעגל** $x_1^2 + y_1^2 = a^2$. **נביע** את x_1 ו-y_1 **באמצעות** x ו-y, נקבל: $x_1 = x$, $y_1 = \frac{a}{b} y$.

עכשיו נציב תוצאות אלה במשוואת המעגל ונקבל $x^2 + (\frac{a}{b} y)^2 = a^2$. נחלק ב-$a^2$ ונקבל $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. כלומר קיבלנו **משוואה** של **אליפסה** קנונית **שהציר הגדול** שלה שווה **לקוטר** המעגל.

הקנייה

נוכל אם כן להביא **הגדרה** נוספת **לאליפסה:**

האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **$(0<b<a)$ היא המקום הגיאומטרי המתקבל מהמעגל** **$x^2+y^2=a^2$ ע"י הכפלת שיעור ה-y של כל נקודה שעל המעגל ב- $\frac{b}{a}$ והשארת שיעור ה-x של כל נקודה שעל המעגל ללא שינוי.**

הקנייה

הערות:

א) בהגדרה שהבאנו כפלנו את שיעורי ה-y של כל נקודות המעגל $x^2+y^2=a^2$ בגודל $\frac{b}{a}$ שהוא **קטן מ-1**. אם נכפול את שיעורי ה-y של כל נקודות המעגל בגודל $\frac{b}{a}$ כאשר הוא **גדול מ-1** נקבל כמו קודם את האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, אלא שהפעם הציר **הגדול** של האליפסה יהיה על **ציר ה-y**.

ב) גם אם כופלים את שיעורי ה-x של כל הנקודות שעל המעגל הקנוני מקבלים אליפסה.

הקנייה

דוגמא א':

נתון המעגל $x^2+y^2=25$. בונים אליפסה המתקבלת ע"י הכפלת שיעורי ה-y של נקודות המעגל ב-$\frac{4}{5}$.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. ישר המאונך לציר ה-x חותך ברביע הראשון את המעגל ואת האליפסה בנקודות M ו-N בהתאמה. מצא את M ו-N אם ההפרש בין שיעורי ה-y שלהן הוא 0.6.

הקנייה

דוגמא א':

נתון המעגל $x^2+y^2=25$. בונים אליפסה המתקבלת ע"י הכפלת שיעורי ה-y של נקודות המעגל ב-$\frac{4}{5}$.

א. מצא את משוואת האליפסה.

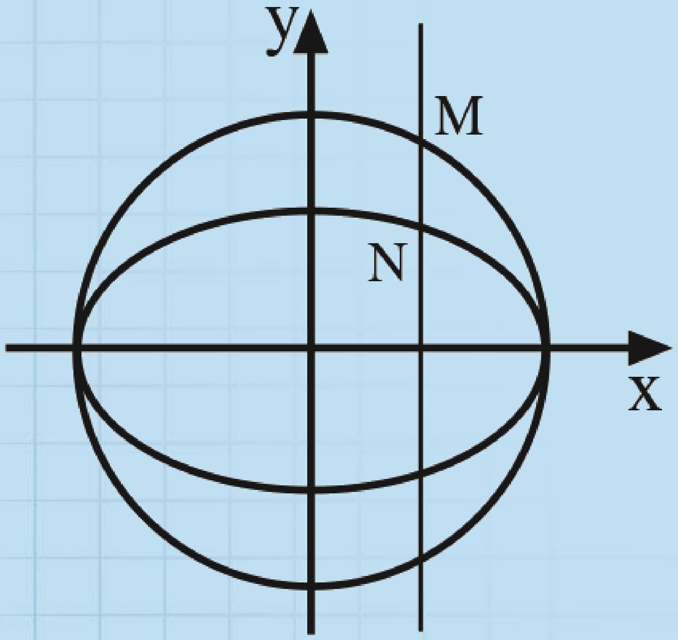
פתרון:

א. כאן $\frac{b}{a}=\frac{4}{5}$ ולכן $\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$. מכאן שמשוואת האליפסה היא $x^2+(\frac{5}{4}y)^2=25$, כלומר $x^2+\frac{25}{16}y^2=25$

או $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

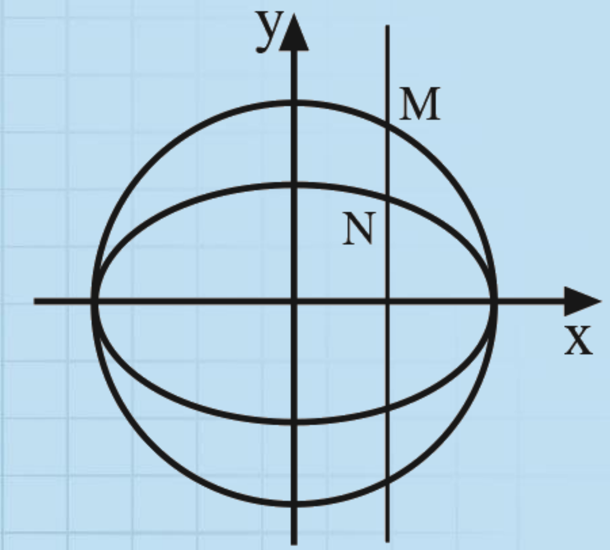
הקנייה

ב. ישר המאונך לציר ה-x חותך ברביע הראשון את המעגל ואת האליפסה בנקודות M ו-N בהתאמה. מצא את M ו-N אם ההפרש בין שיעורי ה-y שלהן הוא 0.6.



הקנייה

ב. שיעורי ה-x של M ו-N הם שווים ונסמנם ב-x_1. אם נסמן ב-y_1 את שיעור ה-y של M אז שיעור ה-y של N הוא $\frac{4}{5}y_1$. לפי הנתון $y_1-\frac{4}{5}y_1 = 0.6$ ומכאן $y_1 = 3$. את x_1 נמצא ע"י הצבה במשוואת המעגל, מקבלים $x_1 = \pm 4$ והפתרון המתאים לרביע הראשון הוא $x_1 = 4$. לכן $M(4,3)$ ו-$N(4,2.4)$.



בהצלחה