הקנייה

משוואת האליפסה ותיאורה הגרפי

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

582 , עמ' 150-153

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

הגדרת האליפסה

בסעיף זה נכיר עקומה נוספת ממעלה שנייה הנקראת **אליפסה**. קיימות כמה אפשרויות להגדיר אליפסה. נביא את ההגדרה הראשונה, המקובלת ביותר.

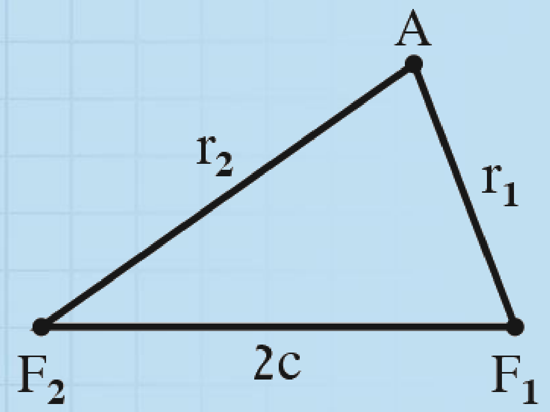
הגדרת האליפסה – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות שווה לקטע קבוע נקרא אליפסה.

הקנייה

את הנקודות הקבועות מסמנים בדרך כלל ב- F_1 ו- F_2, והן נקראות **מוקדי האליפסה.** את **המרחק בין שני המוקדים** מסמנים ב- $2c$. כל אחד משני **המרחקים** של **נקודה** על האליפסה **מהמוקדים** F_1 ו- F_2 נקרא **רדיוס וקטור.** המרחק מ- F_1 מסומן ב- r_1 והמרחק מ- F_2 מסומן ב- r_2. **אורך הקטע הקבוע** (השווה לסכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים) מסומן ב- $2a$ ולכן $\boxed{r_1+r_2 = 2a}$. עפ"י מה שהסברנו עד כה, **שני פרמטרים מאפיינים** את האליפסה והם a ו- c ושניהם **חיוביים.** נראה מה צריך להיות הקשר ביניהם כדי שתתקבל אליפסה.

הקנייה

התנאי לקיום האליפסה



כל נקודה A שעל האליפסה יוצרת יחד עם המוקדים משולש AF_1F_2. נסתמך על המשפט:

סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.

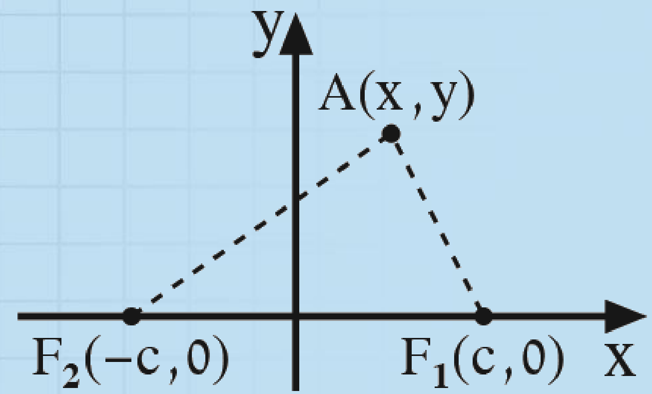
לכן חייב להתקיים: $r_1+r_2 > 2c$, כלומר $2a > 2c$,

ז"א $\boxed{a > c}$ וזהו אם כן **התנאי לקיום האליפסה.**

הקנייה

המשוואה האלגברית של האליפסה

כדי להקל את הטיפול באליפסה נבחר את שני המוקדים F_1 ו-F_2 **על** ציר ה-x כך שהאנך **האמצעי** לקטע F_1F_2 **מתלכד** עם ציר ה-y.



שיעורי המוקדים יהיו לכן $F_1(c,0)$ המוקד **הימני** ו-$F_2(-c,0)$ המוקד **השמאלי**.
נמצא עכשיו את משוואתה של אליפסה כזאת, הנקראת **אליפסה קנונית**.

הקנייה

עפ"י הגדרת האליפסה, אם נקודה $A(x,y)$ נמצאת על האליפסה אז מתקיים:

$$r_1+r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc$$

הקנייה

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2) = a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

כפי שאמרנו $a > c$, לכן $a^2 > c^2$. כלומר $a^2-c^2 > 0$.

נסמן: $\boxed{b^2 = a^2-c^2}$ והמשוואה תקבל את הצורה: $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$.

נחלק ב-$a^2b^2 \neq 0$ ונקבל $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$. לסיכום:

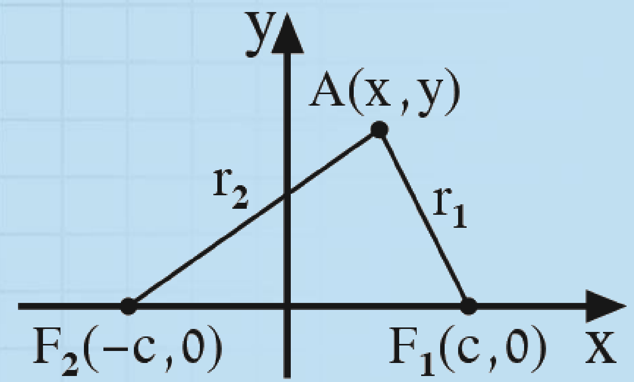
הקנייה

משוואת האליפסה הקנונית היא: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

במשוואה זו מאפיינים את האליפסה הפרמטרים a ו-b ועפ״י ההגדרה $a > b > 0$.

אם $a = b$, כלומר $c = 0$, האליפסה הופכת **למעגל**.

הקנייה



נביא **דרך נוספת** לקבלת נוסחת האליפסה בעזרת **רדיוסי הווקטור.** מתקיימים: $r_1^2=(x-c)^2+y^2$ וכן $r_2^2=(x+c)^2+y^2$. ע״י חיסור המשוואה הראשונה מהשנייה נקבל $r_2^2-r_1^2=4xc$ ובעזרת פירוק לגורמים $(r_2+r_1)(r_2-r_1)=4xc$. כאמור $r_2+r_1=2a$ ולכן נקבל $r_2-r_1=\frac{4xc}{2a}=\frac{2xc}{a}$. למעשה מתקבלות שתי משוואות עם שני נעלמים r_1 ו-r_2 והן $r_2+r_1=2a$ ו-$r_2-r_1=\frac{2xc}{a}$. מפתרון שתי המשוואות נקבל $r_1=a-\frac{cx}{a}$ ו-$r_2=a+\frac{cx}{a}$. אם נציב את התוצאה שקיבלנו עבור r_1 במשוואה הראשונה $r_1^2=(x-c)^2+y^2$ נקבל $\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2=(x-c)^2+y^2$.

הקנייה

$$a^2-2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=x^2-2xc+c^2+y^2.$$

$$x^2-\frac{c^2x^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2.$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

$$a^2-c^2=b^2$$

הקנייה

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$$

$$.\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

עפ"י ההסבר שהבאנו נוכל לסכם:

המרחקים של נקודה $(x\,,y)$ שעל האליפסה מהמוקדים הם:

$$\boxed{r_1 = a-\frac{cx}{a}} \qquad \boxed{r_2 = a+\frac{cx}{a}}$$

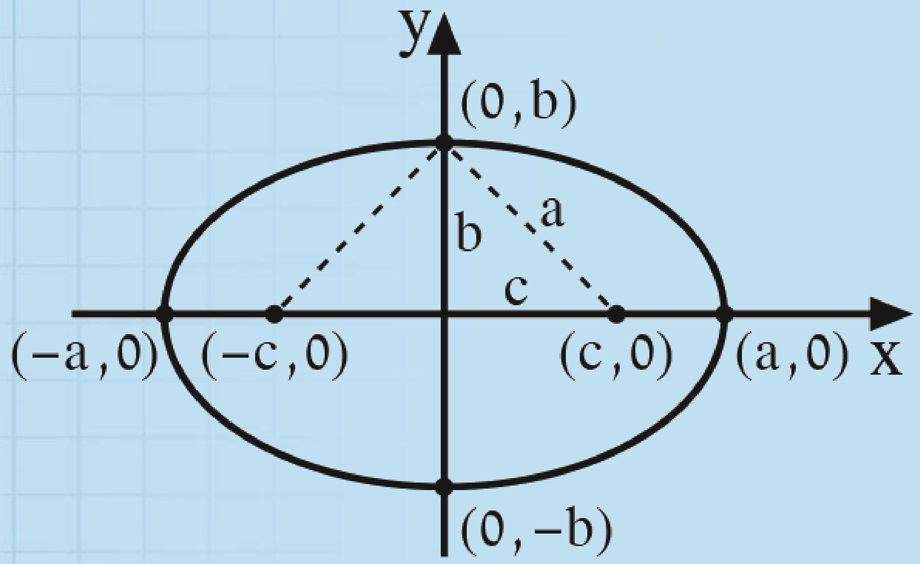
הערה: ניתן להיעזר בנוסחאות אלה לפתרון בעיות הקשורות לאליפסה.

התיאור הגרפי של האליפסה

נדון עכשיו בתיאור הגרפי של האליפסה. נשים לב שבמשוואת האליפסה מופיעים רק הביטויים x^2 ו-y^2. מכאן **שהאליפסה סימטרית** לגבי ציר ה-y **וגם** לגבי ציר ה-x.

אם נחלץ את y ממשוואת האליפסה נקבל $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. הביטוי בתוך השורש צריך להיות אי שלילי, לכן $a^2-x^2 \geq 0$ כלומר $-a \leq x \leq a$. באותו אופן, אם נחלץ את x נקבל $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, לכן $b^2-y^2 \geq 0$ כלומר $-b \leq y \leq b$. מכאן שגרף האליפסה מוגבל בין הנקודות $(a,0)$ ו-$(-a,0)$ על ציר ה-x ובין הנקודות $(0,b)$ ו-$(0,-b)$ על ציר ה-y. הגרף שמתקבל הוא **קו סגור**.

הקנייה



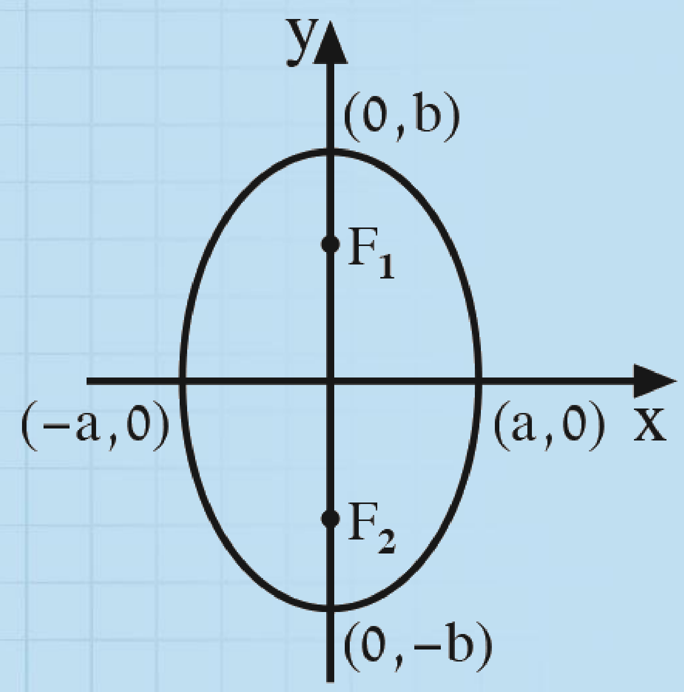
הקטע שבין שתי נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה-x נקרא **הציר הגדול** של האליפסה ואורכו **2a**. הקטע שבין שתי נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה-y נקרא **הציר הקטן** של האליפסה ואורכו **2b**. המרחק בין המוקדים הוא 2c ומתקיים: $a^2 = b^2+c^2$. נקודת החיתוך של הציר הגדול והציר הקטן נקראת **מרכז האליפסה**. קצות הצירים נקראים גם **קודקודי האליפסה**. נוכל **לסכם**:

אליפסה קנונית סימטרית לגבי הצירים ומרכזה בראשית הצירים.

הקנייה

הערות:

א) בדרך כלל נעסוק באליפסה שבה $a > b$. יחד עם זאת ניתן לדבר גם על אליפסה שבה $a < b$. במקרה כזה המשוואה תישאר $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אלא שהציר הגדול יהיה $2b$ והציר הקטן $2a$. המוקדים במקרה זה יהיו על **ציר ה-y** ושיעוריהם $F_1(0,c)$ ו-$F_2(0,-c)$. כמו כן מתקיים $b^2 = a^2+c^2$. כאמור, התנאי לקיום אליפסה כזאת הוא $0 < a < b$. אם לא נציין אחרת, הכוונה היא לאליפסה שבה $0 < b < a$.



בהצלחה