פתרון תרגיל

הוכחת תכונות בפרבולה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 148, ת. 37

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

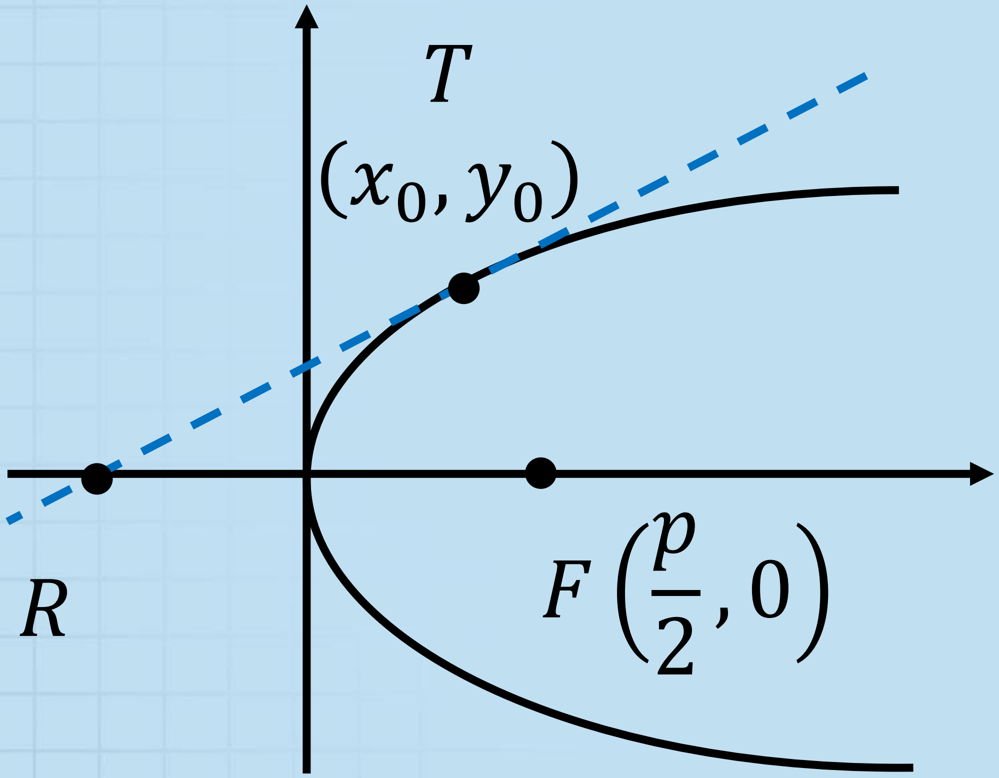
37) א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיק דרכן חותך את ציר ה-x בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

ב. הוכח שהמשולש שקודקודיו הם: נקודת ההשקה שברביע הראשון, מוקד הפרבולה ונקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x הוא משולש שווה צלעות.

א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיק דרכן חותך את ציר ה-x בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

פתרון

נשרטט את נתוני השאלה:

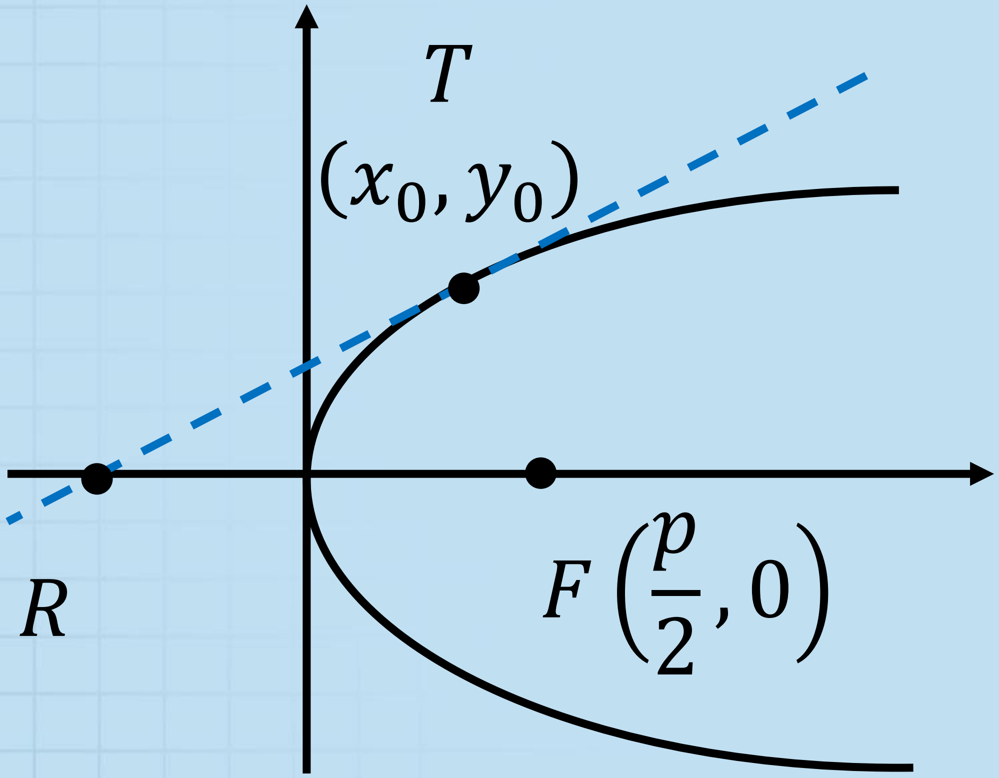


משוואת משיק לפרבולה
בנקודה שעליה:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיך דרכן חותך את ציר ה- x
בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

פתרון



חיתוך המשיק עם ציר x

$$y_R = 0$$

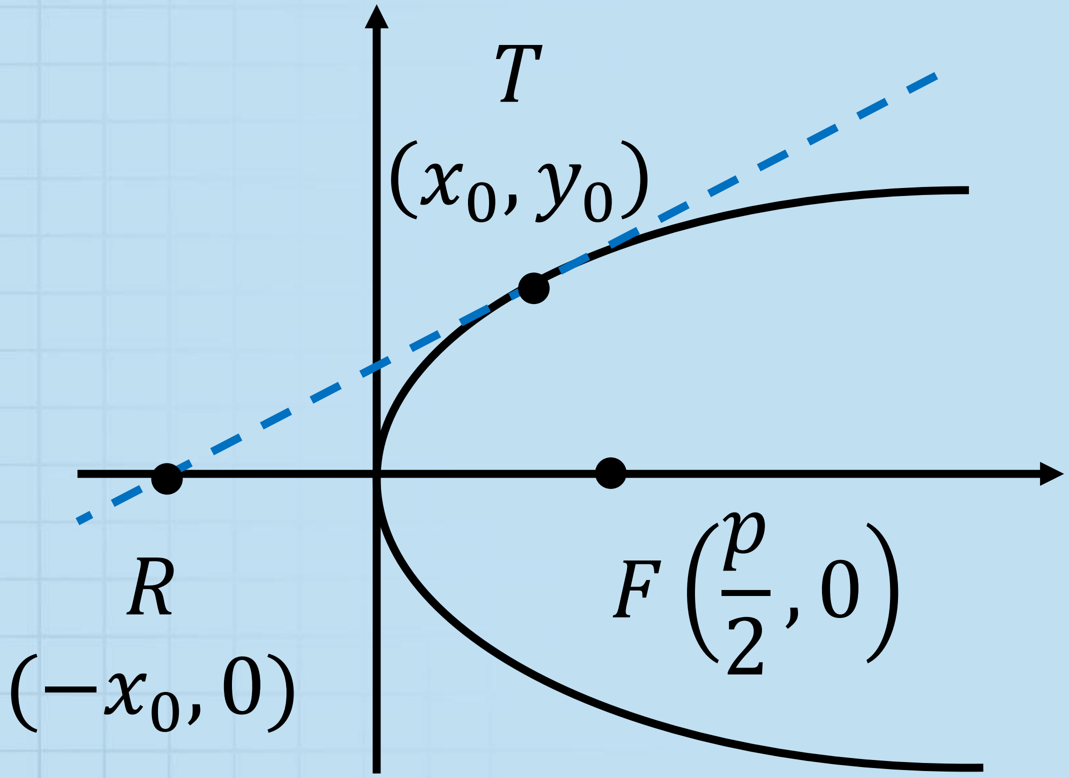
$$\Downarrow$$

$$0 = p(x_R + x_0)$$

$$x_R = -x_0$$

א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיך דרכן חותך את ציר ה-x בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

פתרון



$$RT = RF$$

$$\sqrt{(2x_0)^2 + y_0^2} = \frac{p}{2} + x_0$$

הנקודה על הפרבולה ולכן
מקיימת את משוואתה

א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיך דרכן חותך את ציר ה-x בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

פתרון

$$\sqrt{(2x_0)^2 + y_0^2} = \frac{p}{2} + x_0$$

$$\sqrt{(2x_0)^2 + 2px_0} = \frac{p}{2} + x_0$$

$$4{x_0}^2 + 2px_0 = \frac{p^2}{4} + px_0 + {x_0}^2$$

$$3{x_0}^2 + px_0 - \frac{p^2}{4} = 0$$

א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיק דרכן חותך את ציר ה-x
בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

פתרון

$$3{x_0}^2 + px_0 - \frac{p^2}{4} = 0$$

$$x_{0_{1,2}} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{p^2}{4}\right)}}{2 \cdot 3} = \frac{-p \pm 2p}{6}$$

$$x_0 = \frac{p}{6} \qquad \cancel{x_0 = \frac{-p}{2}} \qquad 0 < x_0$$

א. מצא את הנקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$, שהמשיק דרכן חותך את ציר ה-x בנקודה הנמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומנקודת ההשקה. (הבע באמצעות p).

פתרון

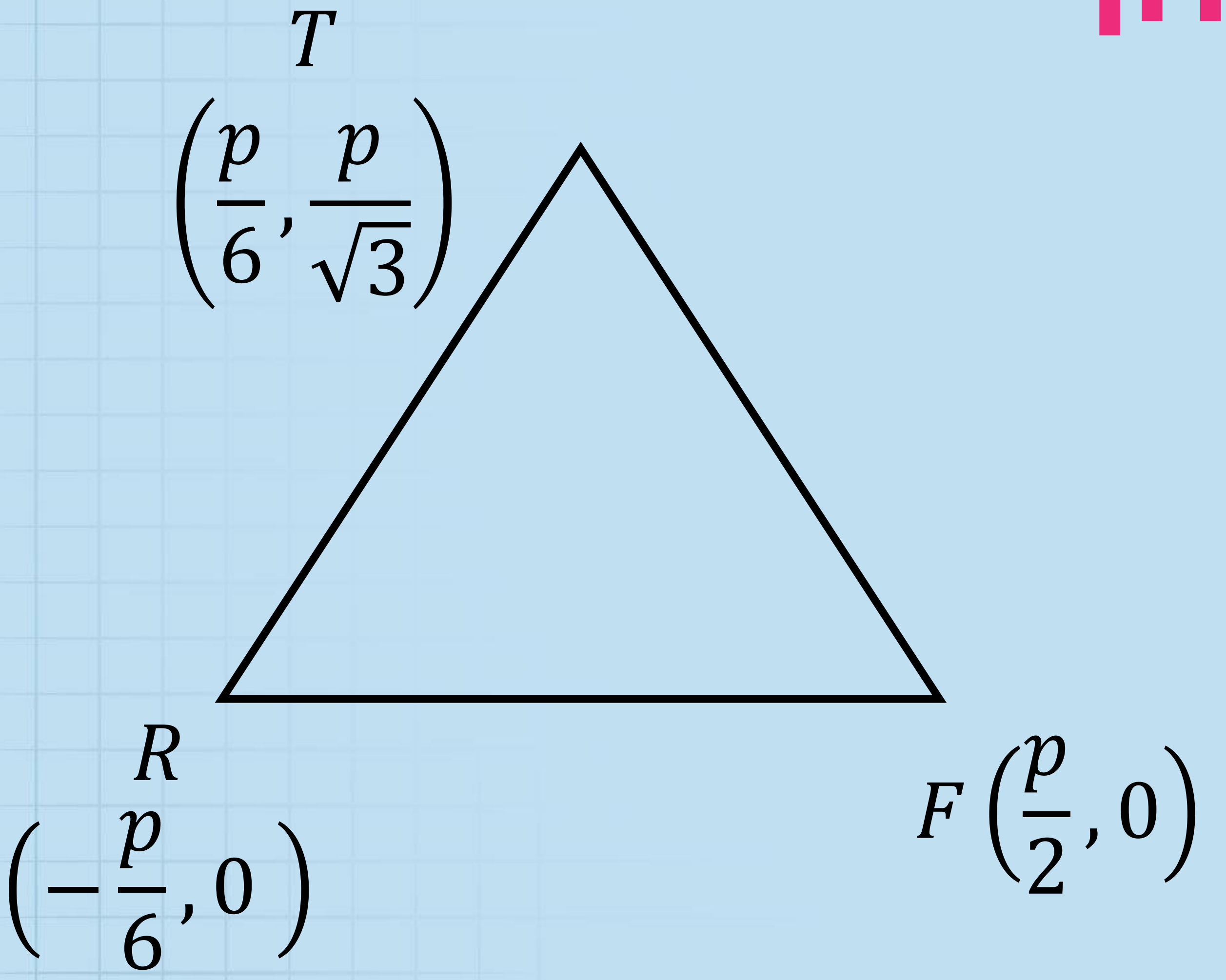
$$\boldsymbol{x_0 = \frac{p}{6}} \quad \Rightarrow \quad y_0^2 = 2p \cdot \frac{p}{6}$$

$$\boldsymbol{y_0 = \pm \frac{p}{\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{p}{6}, \frac{p}{\sqrt{3}}\right)} \qquad \boldsymbol{\left(\frac{p}{6}, -\frac{p}{\sqrt{3}}\right)}$$

ב. הוכח שהמשולש שקודקודיו הם: נקודת ההשקה שברביע הראשון, מוקד הפרבולה ונקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x הוא משולש שווה צלעות.

פתרון



עפ"י סעיף א':

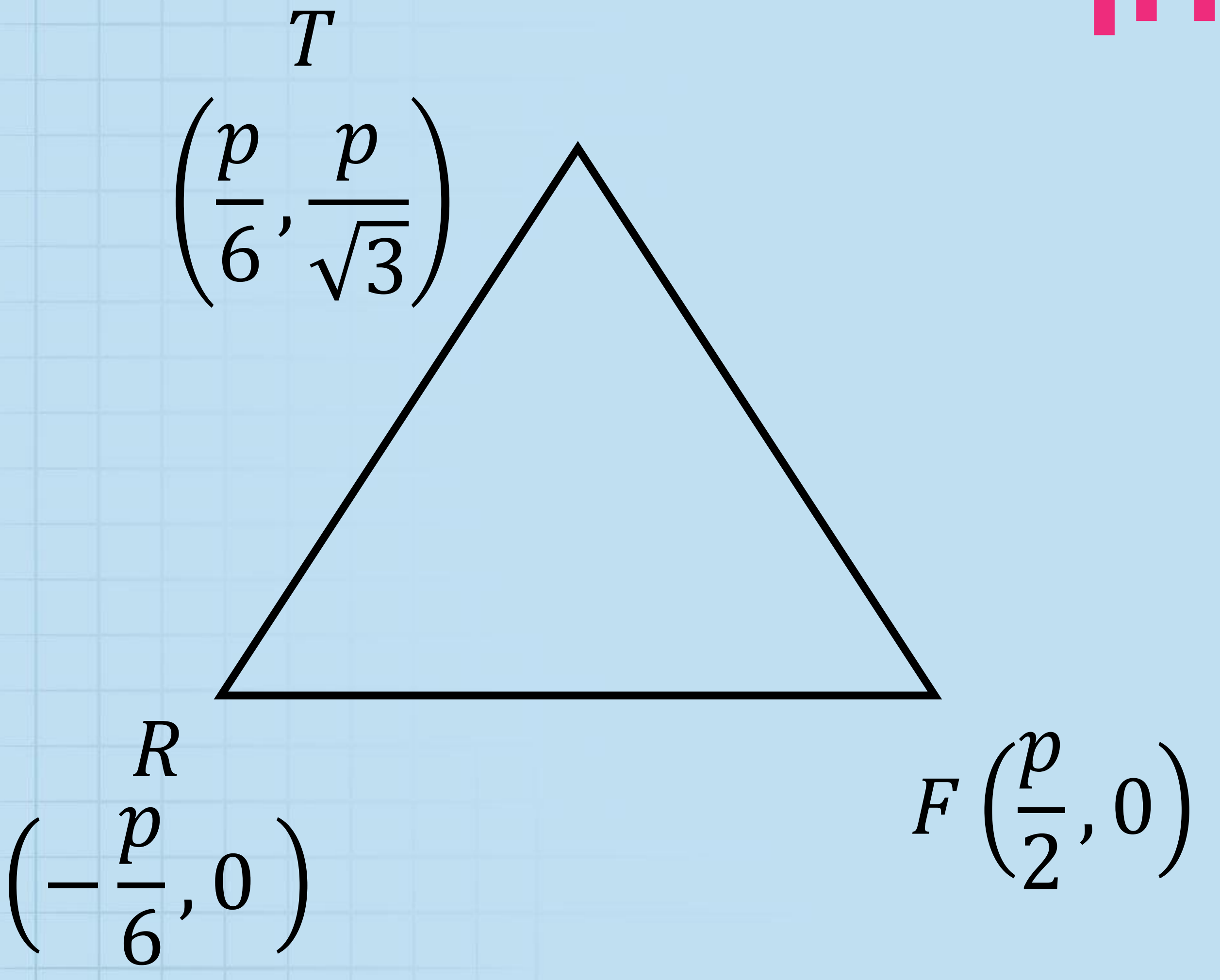
$$TR = RF = \frac{p}{2} + \frac{p}{6}$$

TF הוא רדיוס וקטור,
מרחק נקודה על הפרבולה מהמוקד

$$TF = \frac{p}{2} + x_0 = \frac{p}{2} + \frac{p}{6}$$

ב. הוכח שהמשולש שקודקודיו הם: נקודת ההשקה שברביע הראשון, מוקד הפרבולה ונקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x הוא משולש שווה צלעות.

פתרון



משולש ΔTRF שווה צלעות,
כל צלעותיו שוות

בהצלחה