תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה – פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 374, דוגמה

תרגיל לדוגמה

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תרגיל לדוגמה

ז. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה **הנגזרת** $\mathbf{f'(x)}$ עם ציר ה-x ואת תחומי החיוביות והשליליות שלה.

ח. מצא את התחום שבו $f(x)$ חיובית וגם $f'(x)$ חיובית.

ט. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ בתחום $x \neq 2$. מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של הפונקציה $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

פתרון:

א. **תחום ההגדרה** – אמנם הביטוי $x-2$ שבתוך השורש השלישי מוגדר לכל המספרים אבל היות והוא במכנה אז הוא לא מוגדר עבור $x = 2$. לכן תחום ההגדרה הוא: $x \neq 2$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

ב. **נקודות הקיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)\cdot\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}=0.$$

ע"י הכפלת המונה ב- $3(x-2)^{\frac{2}{3}}$ נקבל: $3(x-2)-(x+2)=0$, כלומר $3x-6-x-2=0$,

ז"א $2x=8$ ולכן $x=4$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

בסה"כ המכנה של הנגזרת הראשונה הוא $3(x-2)^{\frac{4}{3}}$,

כלומר הוא חיובי עבור $x = 4$. מספיק, אם כן, לגזור את המונה של הנגזרת הראשונה

כדי לקבוע אם ב- $x = 4$ יש מינימום או מקסימום. נגזרת המונה של הנגזרת

הראשונה היא 2 ולכן ב- $x = 4$ יש מינימום. ערך המינימום הוא $\frac{4+2}{\sqrt[3]{4-2}} = 4.76$.

לסיכום: לפונקציה יש נקודת קיצון אחת והיא: $(4, 4.76)$ מינימום.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

ג. **תחומי העלייה והירידה** – בהסתמך על נקודת הקיצון של הפונקציה ועל התנהגותה בקרבת נקודת אי ההגדרה שלה $(x = 2)$ נקבל:

הפונקציה עולה בתחום: $x > 4$, הפונקציה יורדת בתחום: $x < 2$ או $2 < x < 4$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

ד. **נקודות החיתוך עם הצירים** –

חיתוך עם ציר ה-y: אם נציב $x = 0$ בפונקציה נקבל $-1.59 = \frac{2}{\sqrt[3]{-2}} = f(0)$.
לכן גרף הפונקציה חותך את ציר ה-y בנקודה $(0,-1.59)$.

חיתוך עם ציר ה-x: אם נשווה את הפונקציה ל-0 נקבל $x = -2$. לכן גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה $(-2,0)$.

לסיכום: נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים הן: $(0,-1.59)$, $(-2,0)$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

ה. **האסימפטוטות המאונכות לצירים –**

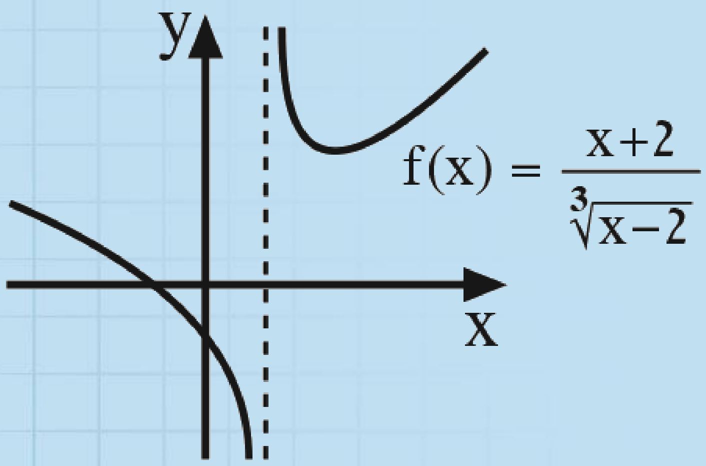
אסימפטוטה אנכית: המכנה שווה ל-0 כאשר $x = 2$. המונה לא שווה ל-0 כאשר $x = 2$ ולכן הישר $x = 2$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

אסימפטוטה אופקית: החזקה הגבוהה ביותר של x במונה היא x. החזקה הגבוהה ביותר של x במכנה היא למעשה $x^{\frac{1}{3}}$. לכן אין לפונקציה אסימפטוטה אופקית.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

ו. **שרטוט גרף הפונקציה** – ניתן להיעזר בטבלה. התיאור הגרפי מופיע משמאל.



x	$x < 2$	2	$2 < x < 4$	4	$x > 4$
$f(x)$		לא מוגדרת		4.76	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
עלייה ירידה	↘		↘		↗

תרגיל לדוגמה

ז. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה **הנגזרת** $f'(x)$ עם ציר ה-x ואת תחומי החיוביות והשליליות שלה.

ז. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x = 4$, לכן הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $(4,0)$. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 4$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית. באופן דומה הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x < 2$ או $2 < x < 4$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא שלילית.

תרגיל לדוגמה

ח. מצא את התחום שבו $f(x)$ חיובית וגם $f'(x)$ חיובית.

ח. הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $x > 2$ או $x < -2$ הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום $x > 4$. לכן הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$ חיוביות בתחום $x > 4$.

תרגיל לדוגמה

ט. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x \neq 2$. מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של הפונקציה $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

ט. שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא שיעור ה-x של נקודת הפיתול של הפונקציה $g(x)$. לכן בנקודה $x = 4$ יש לפונקציה $g(x)$ נקודת פיתול.
בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ עולה הפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ ובתחום שבו הפונקציה $f(x)$ יורדת הפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$. לכן הפונקציה $g(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x > 4$ והיא קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x < 2$ או $2 < x < 4$.

בהצלחה