הקנייה

הנגזרת – פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי ופונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 358–359

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

הקנייה

בלימודי החשבון הדיפרנציאלי ראינו שהנוסחה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה ל-n **טבעי** וגם ל-n **שלם ושלילי**. נראה עכשיו שנוסחה זו נכונה גם כאשר המעריך הוא **שבר**, כלומר הוא מספר **רציונאלי** מהצורה $\frac{n}{m}$ כאשר n ו-m הם מספרים שלמים ו-$m \neq 0$.

הקנייה

הנגזרת של הפונקציה $y = x^{\frac{n}{m}}$:

נעבור למציאת הנגזרת של פונקציית החזקה $y = x^{\frac{n}{m}}$. (n ו-m שלמים, $m \neq 0$,

$x > 0$). אם $y = x^{\frac{n}{m}}$ אז ניתן להעלות בחזקת m את שני האגפים, נקבל $y^m = x^n$.

נגזור את שני האגפים **לפי** x, נסתמך באגף שמאל על הנגזרת של פונקציה מורכבת

(כלל השרשרת) ונקבל: $my^{m-1} \cdot y' = nx^{n-1}$. נחלץ את y' ונקבל $y' = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}$.

נציב $y = x^{\frac{n}{m}}$, נסתמך על חוקי החזקות הרגילים ונקבל:

$$y' = \frac{nx^{n-1}}{m\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}}{mx^{n-\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m}x^{n-1-n+\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

הקנייה

כלומר הנוסחה היא:

$$\boxed{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}} \qquad (m \neq 0 \quad ,x > 0)$$

בעזרת הנגזרת של פונקציה מורכבת נקבל:

$$\boxed{\left((f(x))^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m}(f(x))^{\frac{n}{m}-1} \cdot f'(x)} \qquad (m \neq 0 \quad ,f(x) > 0)$$

הקנייה

דוגמא א':

גזור את הפונקציה $y = \sqrt[3]{x^2}$.

פתרון:

תחילה נכתוב את הפונקציה בעזרת מעריך שהוא שבר, נקבל $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

נגזור לפי הנוסחה הנ"ל: $y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

בהצלחה