תרגיל לדוגמה

פיתול וקעירות – פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

דוגמה, 326 עמ' , 582

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x) = x\ln x - x^2$. מצא את:

א. נקודת הפיתול של הפונקציה.

ב. תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = x\ln x - x^2$.

פתרון:

א. נגזור פעמיים את הפונקציה ונשווה את הנגזרת השנייה ל-0.

נקבל: $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 2x = \ln x + 1 - 2x$ ולכן: $f''(x) = \frac{1}{x} - 2 = 0$.

הפתרון הוא $x = \frac{1}{2}$. הנגזרת השלישית היא $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$. אם נציב

$x = \frac{1}{2}$ בנגזרת השלישית נקבל $-4 \neq 0$ ולכן בנקודה $x = \frac{1}{2}$ יש פיתול.

חישוב ה-y נותן $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -0.60$.

לסיכום: הנקודה $(\frac{1}{2}, -0.60)$ היא נקודת פיתול.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = x\ln x - x^2$.

ב. תחילה נשים לב שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x > 0$. עכשיו נעבור למציאת תחומי הקעירות.

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום שבו הנגזרת השנייה חיובית, כלומר בתחום שבו $\frac{1}{x} - 2 > 0$. את אי השוויון נוכל לכתוב בצורה $\frac{1-2x}{x} > 0$. הפתרון של אי שוויון זה הוא $0 < x < \frac{1}{2}$ ולכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $0 < x < \frac{1}{2}$. (תחום זה כלול בתחום ההגדרה).

תרגיל לדוגמה

$f(x) = x\ln x - x^2$.

לפני שנמצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ נזכור שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x > 0$. פתרון אי השוויון $\frac{1}{x} - 2 < 0$ הוא $x > \frac{1}{2}$ או $x < 0$
ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x > \frac{1}{2}$.

נוכל לסכם: הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $0 < x < \frac{1}{2}$, הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x > \frac{1}{2}$.

בהצלחה