תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציות – פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 301, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

נתונה הפונקציה $f(x) = x\ln x$. חקור את הפונקציה עפ"י הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה.

ב. מצא את נקודות הקיצון.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא את נקודת החיתוך של פונקציית **הנגזרת** $f'(x)$ עם ציר ה-x ואת תחומי החיוביות והשליליות שלה.

תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ בתחום $x > 0$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

(3) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = x\ln x$.

פתרון:

א. **תחום ההגדרה** – הפונקציה מוגדרת עבור $x > 0$.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס: $f'(x) = \ln x + 1 = 0$.

לכן $\ln x = -1$ ומכאן $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. נגזרת שנייה היא $f''(x) = \frac{1}{x}$ ולכן

$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$, כלומר מינימום. ערך המינימום הוא: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$.

לכן הנקודה $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ היא נקודת המינימום.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = x\ln x$.

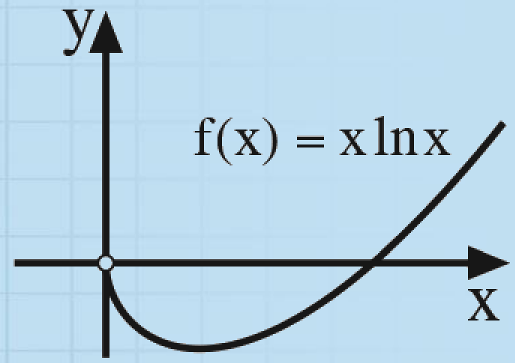
ג. **עלייה וירידה** – עפ"י נקודת המינימום ותחום ההגדרה הפונקציה עולה עבור $x > \frac{1}{e}$ ויורדת עבור $0 < x < \frac{1}{e}$.

ד. **חיתוך עם הצירים** – אין חיתוך עם ציר ה-y כי $x > 0$. למציאת חיתוך עם ציר ה-x נשווה את הפונקציה לאפס, נקבל $x\ln x = 0$ מכאן $x = 0$ וזה לא ייתכן, או $\ln x = 0$ ואז $x = e^0 = 1$. לכן הנקודה היא $(1,0)$.

תרגיל לדוגמה

ה. **שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה** – נדגיש שגרף הפונקציה לא נוגע בציר ה-y.
סימנו זאת ע"י "חור" בראשית הצירים. ניתן להיעזר בטבלה. הגרף מופיע משמאל.

x	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$x > \frac{1}{e}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
עלייה ירידה	$\searrow$	מינימום	$\nearrow$



תרגיל לדוגמה

ו. מצא את נקודת החיתוך של פונקציית **הנגזרת** $f'(x)$ עם ציר ה- x ואת תחומי החיוביות והשליליות שלה.

ו. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{1}{e}$. לכן הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה $(\frac{1}{e}, 0)$. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > \frac{1}{e}$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ חיובית. באופן דומה הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $0 < x < \frac{1}{e}$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא שלילית.

תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.
(1) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

ז. (1) הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה $(1,0)$. היות והפונקציה $f(x)$ היא הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ אז לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 1$. נקודה זו היא נקודת מינימום כי בנקודה זו $f(x)$ עוברת משליליות לחיוביות.

תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

(2) הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $x > 1$ והיא שלילית בתחום $0 < x < 1$

לכן הפונקציה $g(x)$ עולה בתחום $x > 1$ ויורדת בתחום $0 < x < 1$.

תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.

(3) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$.

(3) נסתמך על כך שבנקודת קיצון של הפונקציה הנגזרת יש לפונקציה המקורית נקודת פיתול ולהיפך. כאן הפונקציה היא $g(x)$ והפונקציה הנגזרת היא $f(x)$. שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $f(x)$ הוא $x = \frac{1}{e}$ ולכן שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ גם הוא $x = \frac{1}{e}$.

בהצלחה