פתרון תרגיל

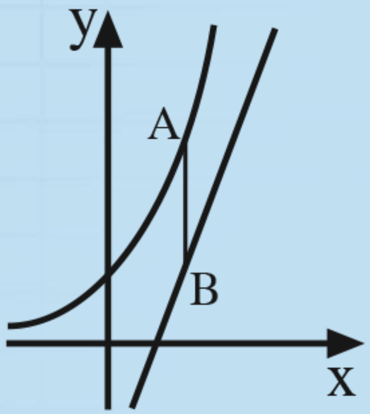
בעיות קיצון – פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 246, ת. 3

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה



3) בציור מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x) = e^x$ והישר $y = ex-2$. ישר המקביל לציר ה-y חותך את הגרפים בנקודות A ו-B.

א. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

ב. מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB בתחום $0 \le x \le \ln 6$.

ג. הראה שבנקודה A שמצאת בסעיף א' שיפוע הפונקציה $f(x)$ שווה לשיפוע הישר.

ד. $g(x)$ היא הפונקציה שמייצגת את אורך הקטע AB כאשר x היא שיעור ה-x של הנקודה A (או של הנקודה B). $h(x)$ היא הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g'(x)}$.

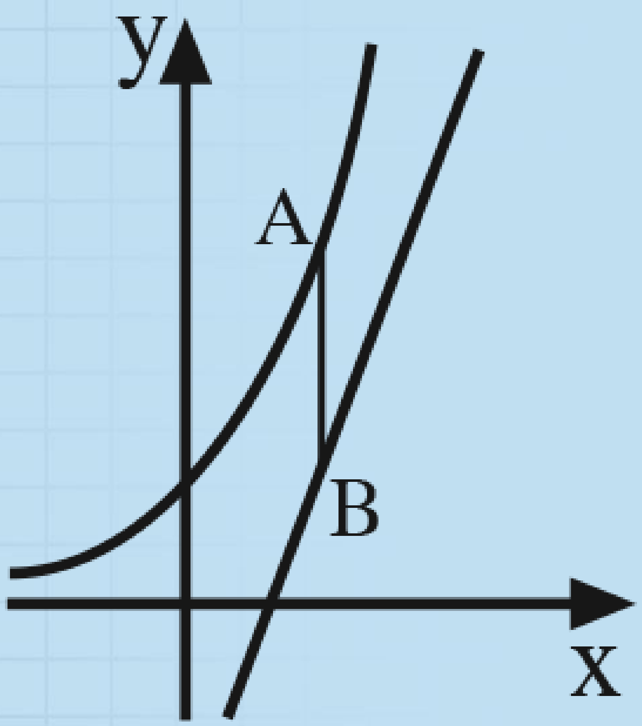
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

$f(x) = e^x$ $\quad y = ex-2$.

א. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון



נסמן את שיעור ה-x של הנקודות A ו- B:

$$x_A = x_B = t$$

$$AB = y_A - y_B = f(t) - y(t)$$

$$= e^t - et + 2$$

נמצא לפונקציה נקודת מינימום

$f(x) = e^x$ $\quad$ $y = ex-2$.

א. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

$$g(t) = e^t - et + 2$$

נדרוש: $\boldsymbol{g'(t) = 0}$

$$g'(t) = e^t - e = 0$$

$$e^t = e$$

$$\boldsymbol{t = 1}$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה

פתרון

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה

$$g''(t) = (e^t - e)' = e^t$$

$$g''(1) = e > 0$$

עבור $t = 1$ לפונקציה נקודת מינימום

$f(x) = e^x$ $y = ex-2$.

א. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון

$$AB_{min} = g(1) = e^1 - e \cdot 1 + 2 = 2$$

אורכו המינימלי של AB הוא 2

ב. מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB בתחום $0 \le x \le \ln 6$.

פתרון

עלינו למצוא מקסימום מוחלט לפונקציה $g(t)$ בתחום

עפ״י סעיף א׳ לפונקציה נקודת קיצון פנימית מסוג מינימום בלבד.
מקסימום מוחלט יכול להתקבל מנקודות קצה התחום הסגור

ב. מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB בתחום $0 \le x \le \ln 6$.

פתרון

$$g(0) = e^{0} - e \cdot 0 + 2 = 3$$

$$g(\ln 6) = e^{\ln 6} - e \cdot \ln 6 + 2 = 8 - e \ln 6 = 3.13$$

אורכו המקסימלי של AB בתחום הנתון הוא 3.13

$f(x) = e^x$ $\quad$ $y = ex-2$.

ג. הראה שבנקודה A שמצאת בסעיף א' שיפוע הפונקציה $f(x)$ שווה לשיפוע הישר.

פתרון

שיפוע הישר, $m = e$

שיפוע הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודה

$$x_A = t = 1$$

$$f'(1) = e^1 = e$$

בנקודה A שיפוע הפונקציה שווה לשיפוע הישר

ד. $g(x)$ היא הפונקציה שמייצגת את אורך הקטע AB כאשר x היא שיעור ה-x של הנקודה A (או של הנקודה B). $h(x)$ היא הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g'(x)}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

פתרון

נדרוש: $g'(x) \neq 0$

עפ"י סעיף א': $x \neq 1$

ד. $g(x)$ היא הפונקציה שמייצגת את אורך הקטע AB כאשר x היא שיעור ה-x של הנקודה A (או של הנקודה B). $h(x)$ היא הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g'(x)}$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

פתרון

עבור $x = 1$ המכנה שווה לאפס והמונה שונה מאפס

$f(1) = e$

$g'(1) = 0$

$x = 1$ אסימפטוטה אנכית

ד. $g(x)$ היא הפונקציה שמייצגת את אורך הקטע AB כאשר x היא שיעור ה-x של הנקודה A (או של הנקודה B). $h(x)$ היא הפונקציה $\mathbf{h(x) = \frac{f(x)}{g'(x)}}$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

פתרון

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x - e}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} h(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} - \frac{e}{e^x}} = \frac{1}{1 - \frac{e}{e^\infty}} = 1$$

עבור $x \longrightarrow \infty$ קיימת אסימפטוטה אופקית $y = 1$

ד. $g(x)$ היא הפונקציה שמייצגת את אורך הקטע AB כאשר x היא שיעור ה-x של הנקודה A (או של הנקודה B). $h(x)$ היא הפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{g'(x)}$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

פתרון

$$h(x)=\frac{e^x}{e^x-e}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\frac{e^{-\infty}}{e^{-\infty}-e}=\frac{0}{-e}=0$$

עבור $x\to-\infty$ קיימת אסימפטוטה אופקית $y=0$

בהצלחה