הקנייה

פיתול וקעירות – פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

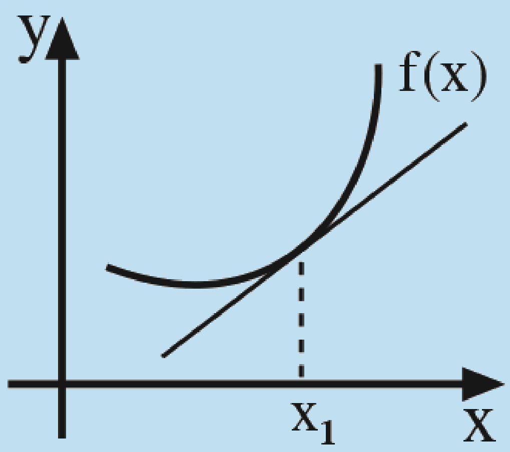
582 , עמ' 237–238

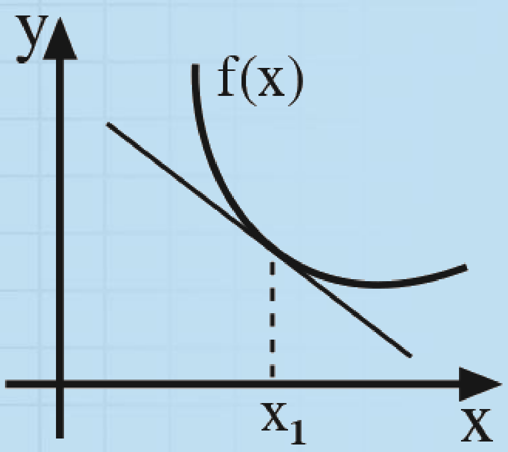
המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

הקנייה

נתונה פונקציה $f(x)$ ונתונה נקודה x_1 שבה יש לפונקציה משיק.

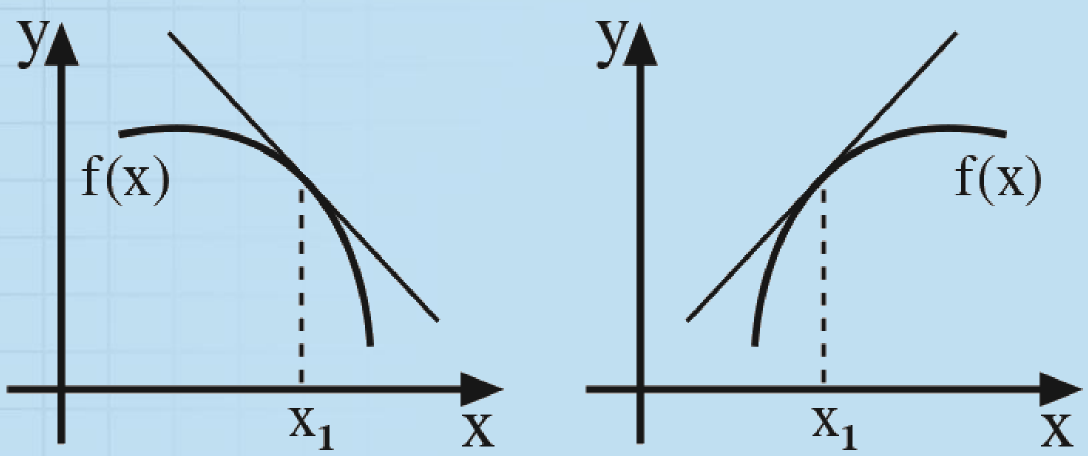
פונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ – אם
קיימת סביבה של הנקודה x_1 (שאיננה
כוללת את x_1) עבורה גרף הפונקציה נמצא
מעל למשיק בנקודה x_1 אז הפונקציה
$f(x)$ קעורה כלפי מעלה בנקודה הנ"ל.



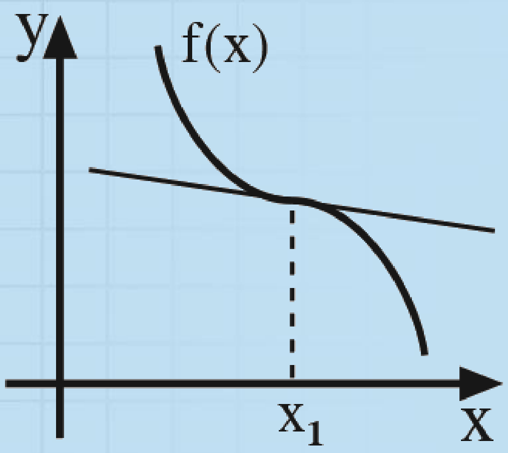


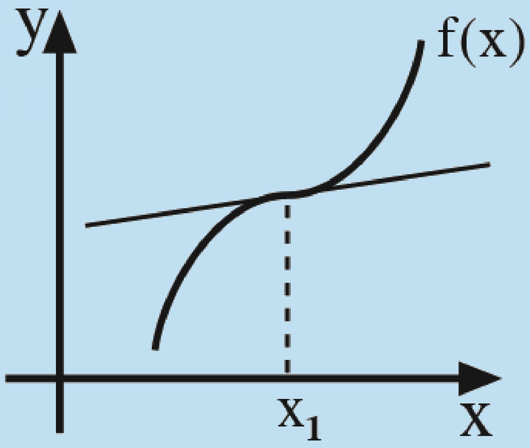
הקנייה

פונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ – אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 (שאיננה כוללת את x_1) עבורה גרף הפונקציה נמצא מתחת למשיק בנקודה x_1 אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בנקודה הנ"ל.



הקנייה





נקודת פיתול – אם בנקודה x_1 המשיק לגרף הפונקציה עובר מצד אחד של גרף הפונקציה לצד השני אז הנקודה x_1 נקראת נקודת פיתול.

(לא נדון כאן בנקודות פיתול שבהן המשיק מאונך לציר ה-x או שאין בהן משיק).

הקנייה

נתונה פונקציה $f(x)$ שגזירה שלוש פעמים בנקודה x_1.
אם $f''(x_1) = 0$ ו-$f'''(x_1) \neq 0$ אז x_1 היא נקודת פיתול.

הערה: ניתן לקבוע אם נקודה (שבה הנגזרת השנייה מתאפסת) היא נקודת **פיתול** גם **ללא** הנגזרת **השלישית** וזאת ע״י חישוב ערכי הנגזרת **השנייה** בנקודות שמשני צדי הנקודה.
(דבר דומה עשינו לגבי נקודת **קיצון** והנגזרת **הראשונה**).

הקנייה

משפט:

נתונה פונקציה $f(x)$ שגזירה פעמיים בנקודה x_1.

א) אם $f''(x_1) > 0$ אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ בנקודה x_1.

ב) אם $f''(x_1) < 0$ אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בנקודה x_1.

הקנייה

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2-7)e^{-x}$. מצא את:

א. נקודות הפיתול של הפונקציה.

ב. תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה.

הקנייה

$f(x) = (x^2-7)e^{-x}$.

א. נגזור פעמיים את הפונקציה. נקבל:

$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2-7)e^{-x} \cdot (-1) = (-x^2+2x+7)e^{-x}$.

$f''(x) = (-2x+2)e^{-x} + (-x^2+2x+7)e^{-x} \cdot (-1) = (x^2-4x-5)e^{-x}$.

נשווה את הנגזרת השנייה ל-0 ונקבל: $(x^2-4x-5)e^{-x} = 0$. הביטוי $e^{-x} \neq 0$ ולכן $x^2-4x-5 = 0$. פתרונות המשוואה הם: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

כדי להראות שהנקודות הן נקודות פיתול מספיק לגזור את הביטוי x^2-4x-5. הנגזרת היא $2x-4$ והצבה של $x_1 = -1$ ו-$x_2 = 5$ מראה שהנגזרת השלישית שונה מ-0.

הצבה של $x = -1$ בפונקציה נותנת $y = -6e$ והצבה של $x = 5$ נותנת $y = \frac{18}{e^5}$.

לסיכום: נקודות הפיתול של הפונקציה הן: $(-1, -6e)$, $\left(5, \frac{18}{e^5}\right)$.

הקנייה

$f(x) = (x^2-7)e^{-x}$.

ב. הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום שהנגזרת השנייה חיובית, כלומר בתחום שבו $(x^2-4x-5)e^{-x} > 0$. הביטוי e^{-x} הוא חיובי ולכן מספיק לפתור את אי השוויון $x^2-4x-5 > 0$. הפתרון של אי שוויון ריבועי זה הוא $x < -1$ או $x > 5$.

נוכל **לסכם:** הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x < -1$ או $x > 5$,
הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $-1 < x < 5$.

הערה: אם הפונקציה לא מוגדרת לכל x יש לשים לב לתחום ההגדרה כאשר מוצאים את תחומי הקעירות.

בהצלחה