תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה – פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 212, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

תרגיל לדוגמה

דוגמא א׳:

נתונה הפונקציה $f(x) = e^x - x$. חקור את הפונקציה עפ״י הסעיפים הבאים ומצא:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. תחומי עלייה וירידה.

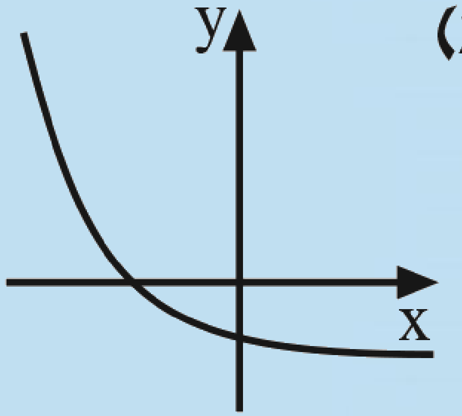
ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

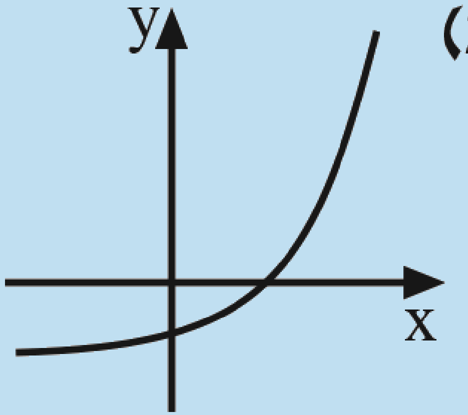
תרגיל לדוגמה

ו. נתונים ארבעה גרפים. איזה גרף מתאר את פונקציית **הנגזרת** $f'(x)$? נמק.

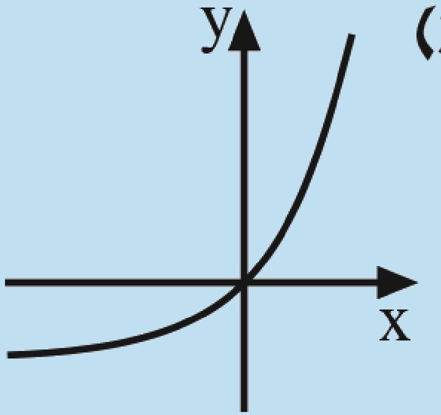
(1)



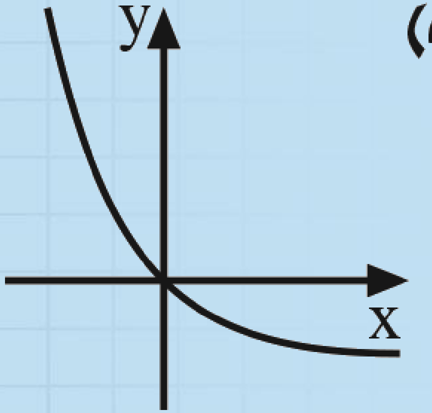
(2)



(3)



(4)



תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ לכל x.

(1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.

(2) מצא את **שיפוע המשיק** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

(3) מצא את שיעור ה-x של **נקודת הפיתול** של הפונקציה $g(x)$.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = e^x - x$.

א. **תחום הגדרה** – הפונקציה $f(x) = e^x - x$ מוגדרת לכל x.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונקבל: $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1 = 0$, לכן $e^x = 1$ ומכאן $x = 0$. נגזור פעם שנייה $f''(x) = e^x$, לכן $f''(0) = 1 > 0$ וזאת נקודת מינימום. ערך הפונקציה הוא $f(0) = e^0 - 0 = 1$. כלומר הנקודה $(0,1)$ היא נקודת מינימום.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = e^{x} - x$.

ג. **תחומי עלייה וירידה** – עפ"י נקודת המינימום הפונקציה עולה עבור $x > 0$
ויורדת עבור $x < 0$.

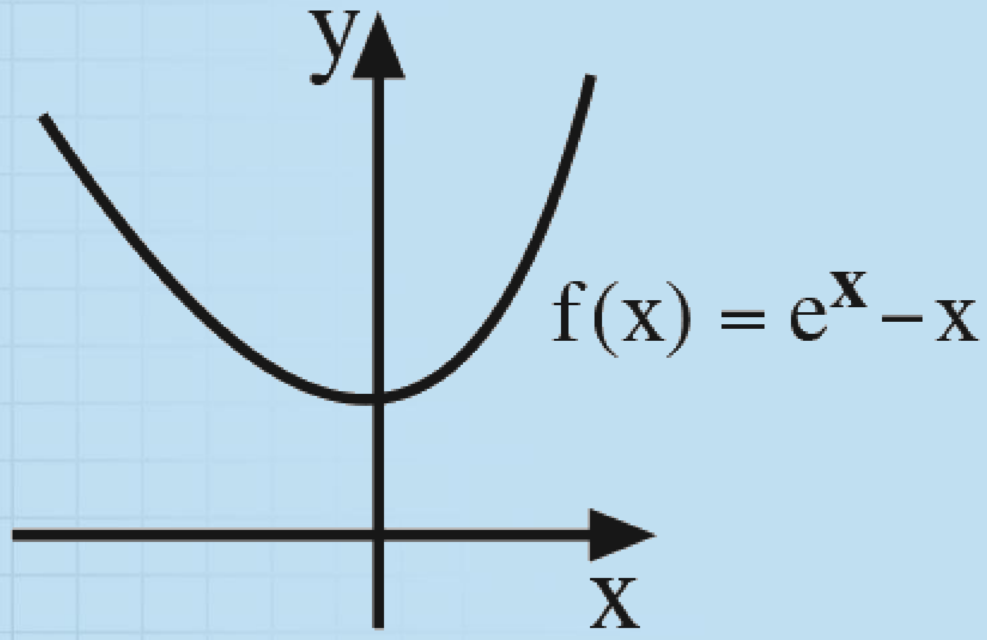
ד. **חיתוך עם הצירים** – חיתוך עם ציר ה-y: $(0,1)$.
חיתוך עם ציר ה-x: הפונקציה **לא** חותכת את ציר ה-x כי ערכה **המינימלי** הוא 1.

תרגיל לדוגמה

$f(x) = e^x - x$.

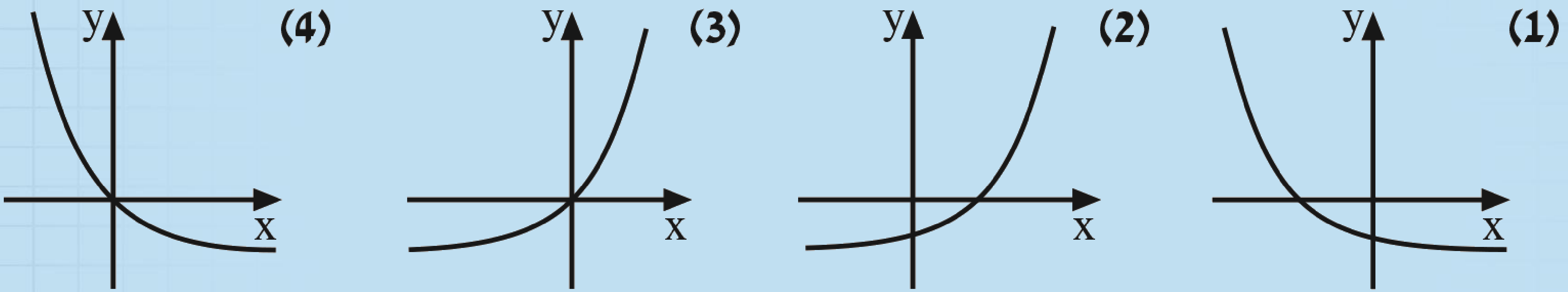
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה –
ניתן להיעזר בטבלה. הגרף מופיע משמאל.

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
עלייה ירידה	↘	מינימום	↗



תרגיל לדוגמה

ו. נתונים ארבעה גרפים. איזה גרף מתאר את פונקציית **הנגזרת** $f'(x)$? נמק.



ו. הפונקציה הנגזרת היא $f'(x) = e^x - 1$. ניתן למצוא איזה גרף מתאר את הפונקציה $f'(x)$ בשתי דרכים.

תרגיל לדוגמה

דרך א' – אם נגזור את $f'(x)$ נקבל: $f''(x) = e^x$. עפ"י תוצאה זו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ **חיובית** לכל x ולכן הפונקציה $f'(x)$ **עולה** לכל x. כלומר הגרפים האפשריים הם (2) או (3). קל לראות שהפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $(0,0)$ ולכן הגרף המתאים הוא גרף (3).

תרגיל לדוגמה

דרך ב' – כפי שראינו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת **מינימום** בנקודה שבה $\mathbf{x = 0}$.
לכן הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **חותכת** את ציר ה-x בנקודה $\mathbf{(0,0)}$. כלומר הגרפים
האפשריים הם (3) או (4). הפונקציה $\mathbf{f(x)}$ **עולה** בתחום $x > 0$ ולכן בתחום זה
הפונקציה הנגזרת $\mathbf{f'(x)}$ היא **חיובית**. באופן דומה הפונקציה $\mathbf{f(x)}$ **יורדת** בתחום
$x < 0$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $\mathbf{f'(x)}$ היא **שלילית**. הגרף שמתאים למצב
זה הוא גרף (3).

תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$ לכל x.

(1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.

ז. (1) עפ"י הנתון $f(x)$ היא הנגזרת של $g(x)$. כפי שרואים מהגרף של $f(x)$ היא **לא חותכת** את ציר ה-x, כלומר הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ **לא מתאפסת** באף נקודה ולכן ל-$g(x)$ **אין** נקודות קיצון. נוסף לכך, גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מעל לציר ה-x. כלומר $f(x)$ **חיובית** לכל x, ז"א שהנגזרת של $g(x)$ חיובית לכל x, ולכן הפונקציה $g(x)$ **עולה** לכל x.

תרגיל לדוגמה

(2) מצא את **שיפוע המשיך** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

(2) כאמור $f(x)$ היא הנגזרת של הפונקציה $g(x)$. לכן, כדי למצוא את שיפוע המשיך לגרף של $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$, צריך להציב $x = 1$ בפונקציה $f(x)$.
נקבל $f(1) = e^1 - 1 = e - 1$. כלומר שיפוע המשיך המבוקש הוא $m = e - 1$.

תרגיל לדוגמה

(3) מצא את שיעור ה-x של **נקודת הפיתול** של הפונקציה $g(x)$.

תרגיל לדוגמה

נזכיר תחילה את ההגדרה שמתייחסת לפונקציות שבתוכנית הלימודים.

נתונה פונקציה $f(x)$ ונתונה נקודה x_1 שבה לפונקציה יש משיק. x_1 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אם בנקודה x_1 המשיק לגרף הפונקציה עובר מצד אחד של גרף הפונקציה לצד השני של גרף הפונקציה.

תרגיל לדוגמה

בכל נקודת פיתול של פונקציה $f(x)$, שהמשיק בה לא מאונך לציר ה-x, יש לפונקציה הנגזרת $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

הערה: המשמעות של הטענה היא שאם בנקודה $x = x_1$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול אז בנקודה $x = x_1$ יש לפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון ולהיפך. (שיעורי ה-y הם כמובן לא בהכרח שווים).

תרגיל לדוגמה

(3) מצא את שיעור ה-x של **נקודת הפיתול** של הפונקציה $g(x)$.

(3) נסתמך על כך שבנקודת קיצון של הפונקציה הנגזרת יש לפונקציה המקורית **נקודת פיתול ולהיפך**. כאן הפונקציה היא $g(x)$ והפונקציה הנגזרת היא $f(x)$. שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $f(x)$ הוא $x = 0$ ולכן שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ גם הוא $x = 0$.

בהצלחה