הקנייה

הנגזרת – פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 186–187

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

נגזרת הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$

נעבור עכשיו לחישוב הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה כלשהי x_1.

כדי למצוא את הנגזרת בנקודה x_1 נחשב את הגבול של המנה $\frac{e^x - e^{x_1}}{x - x_1}$ כאשר x שואף ל-x_1. נסמן $x - x_1 = h$ (h מספר קטן), נסתמך על חוקי החזקה ונקבל:

$$\frac{e^x - e^{x_1}}{x - x_1} = \frac{e^{x_1+h} - e^{x_1}}{h} = \frac{e^{x_1}(e^h - 1)}{h} = e^{x_1} \cdot \frac{e^h - 1}{h}.$$

הקנייה

$$\frac{e^{x}-e^{x_1}}{x-x_1}=\frac{e^{x_1+h}-e^{x_1}}{h}=\frac{e^{x_1}(e^{h}-1)}{h}=e^{x_1}\cdot\frac{e^{h}-1}{h}.$$

הגודל e^{x_1} הוא **קבוע** ונותר לחשב למה שואפת המנה $\frac{e^{h}-1}{h}$.

אם x שואף ל-x_1 אז h שואף ל-0, כלומר יש לחשב את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}$.

הקנייה

את הגבול ניתן לרשום גם באופן הבא: $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0}$. כפי שניתן לראות, זהו בדיוק **ערך**

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $x = 0$. ערך זה, כפי שראינו, שווה ל-1.

כלומר הגבול של המנה $\frac{e^x - e^{x_1}}{x - x_1}$ כאשר x שואף ל-x_1 הוא $e^{x_1} \cdot 1$ ז"א $(e^{x_1})' = e^{x_1}$.

הקנייה

לסיכום:

נגזרת הפונקציה $f(x) = e^x$ שווה לפונקציה עצמה.

הנוסחה: $\boxed{(e^x)' = e^x}$

הקנייה

הנגזרת של הפונקציה $y = e^{f(x)}$

בעזרת הנגזרת של **פונקציה מורכבת** נוכל לרשום גם את הנוסחה הבאה:

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

הערה: כדי לגזור פונקציה כמו הפונקציה $y = \frac{x}{e^x}$ ניתן לרשום אותה בצורה $y = x \cdot e^{-x}$ ולגזור אותה בעזרת הנגזרת של מכפלת פונקציות.

הקנייה

דוגמא:

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $y = 2e^{x} + 1$

(2) $y = x^{3}e^{x}$

(3) $y = e^{x^{2}-x}$

(4) $y = \frac{2x+1}{e^{2x}+1}$

הקנייה

$y = 2e^x + 1$ (1)

פתרונות:

(1) $y' = (2e^x+1)' = (2e^x)' + 1' = 2(e^x)' + 0 = 2e^x$.

הקנייה

$y = x^3 e^x$ (ב)

(ב) עפ"י נגזרת של מכפלת שתי פונקציות נקבל:

$$y' = (x^3 e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3) e^x.$$

הקנייה

$y = e^{x^2-x}$ (3)

(3) עפ"י נגזרת של פונקציה מורכבת נקבל:

$$y' = \left(e^{x^2-x}\right)' = e^{x^2-x} \cdot (x^2-x)' = e^{x^2-x} \cdot (2x-1).$$

הקנייה

$$y = \frac{2x+1}{e^{2x}+1} \quad (4)$$

(4) עפ"י נגזרת של מנת שתי פונקציות נקבל:

$$y' = \left(\frac{2x+1}{e^{2x}+1}\right)' = \frac{(2x+1)'\cdot(e^{2x}+1)-(2x+1)\cdot(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(e^{2x}+1)-(2x+1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}+2-4xe^{2x}-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2-4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

בהצלחה