תרגיל לדוגמה

אי שוויונות לוגריתמיים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 130–131,

דוגמאות א'–ג'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

בפתרון אי שוויונות לוגריתמיים צריך לשים לב לכללים הבאים:

א) תחום ההגדרה של אי השוויון – כל הביטויים שמופיעים בתוך הלוגריתמים חייבים להיות חיוביים.

ב) אם בסיס הלוגריתם גדול מ-1 אז אי השוויון שבין הביטויים שבתוך הלוגריתמים הוא באותו הכיוון של אי השוויון שבין הלוגריתמים.
אם הבסיס הוא בין 0 ל-1 אז אי השוויון שבין הביטויים שבתוך הלוגריתמים הוא הפוך בכיוונו לאי השוויון שבין הלוגריתמים.

ג) אם המשתנה x מופיע בבסיס הלוגריתם אז צריך לזכור שהבסיס חיובי ושונה מ-1.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א׳:

פתור את אי השוויון $\log_3 x < 2$.

פתרון:

נמצא תחילה את תחום ההגדרה של אי השוויון. הביטוי בתוך הלוגריתם צריך להיות חיובי, לכן $x > 0$ וזהו תחום ההגדרה. נעבור לפתרון אי השוויון עצמו.

דרך א׳ – נסתמך על הגדרת הלוגריתם ועל כך שהבסיס 3 הוא גדול מ-1 ונקבל מאי השוויון הנתון את אי השוויון $x < 3^2$, כלומר $x < 9$. ביחד עם תחום ההגדרה נקבל שהפתרון של אי השוויון הוא $0 < x < 9$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א׳:

פתור את אי השוויון $\log_3 x < 2$.

דרך ב׳ – אפשר לרשום את אי השוויון הנ״ל בצורה הבאה: $\log_3 x < \log_3 9$ (כי $2 = \log_3 9$). הבסיס 3 הוא גדול מ-1 ולכן מאי השוויון הנ״ל נובע אי השוויון $x < 9$. ביחד עם תחום ההגדרה נקבל שהפתרון של אי השוויון הוא $0 < x < 9$ כפי שקיבלנו קודם.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

פתור את אי השוויון $\log_{0.1}(x^2-2x) > \log_{0.1}(2x-3)$.

פתרון:

תחילה נמצא את תחום ההגדרה של אי השוויון. הביטויים בתוך הלוגריתמים צריכים להיות חיוביים. כלומר $2x-3>0$ וגם $x^2-2x>0$. הפתרונות של אי השוויונות הנ"ל הם $x>1\frac{1}{2}$ וגם $x>2$ או $x<0$. התחום המשותף של שני אי השוויונות הוא $x>2$ או $x<0$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

פתור את אי השוויון $\log_{0.1}(x^2-2x) > \log_{0.1}(2x-3)$.

נעבור לפתרון אי השוויון עצמו. הבסיס הוא 0.1 והוא בין 0 ל-1 לכן כיוונו של אי השוויון מתהפך. כלומר צריך לפתור את אי השוויון $x^2-2x < 2x-3$. אי השוויון האחרון שקול לאי השוויון $x^2-4x+3 < 0$ שהפתרון שלו הוא $1 < x < 3$. בהתחשב בתחום ההגדרה נקבל שהפתרון של אי השוויון הוא $2 < x < 3$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ג':

פתור את אי השוויון הלוגריתמי $(\log_{\frac{1}{3}}(x+1))^2 \geq 1$.

פתרון:

תחום ההגדרה של אי השוויון הוא $x+1 > 0$ כלומר $x > -1$.

אם נסמן $t = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ אז נקבל את אי השוויון **הריבועי** $t^2 \geq 1$ שהפתרון שלו

הוא $t \geq 1$ או $t \leq -1$.

תרגיל לדוגמה

לכן אי השוויון המקורי שקול למערכת $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \geq 1$ או $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq -1$.

או $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq -1$. היות והבסיס $\frac{1}{3}$ הוא בין 0 ל-1 אז מאי השוויון הראשון נקבל $x+1 \leq \frac{1}{3}$, כלומר $x \leq -\frac{2}{3}$. מאי השוויון השני נקבל $x+1 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$, ז"א $x \geq 2$. בסה"כ, בהתחשב בתחום ההגדרה, הפתרון של אי השוויון הוא $x \geq 2$ או $-1 < x \leq -\frac{2}{3}$.

בהצלחה