הקנייה

חוקי הלוגריתמים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 112–113

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

(1) לוגריתם של מכפלת שני מספרים לפי בסיס כלשהו שווה לסכום הלוגריתמים של שני המספרים לפי אותו בסיס.

בנוסחה:

$$\boxed{\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

הקנייה

$$\boxed{\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

(1) נסמן $\log_a x = b$, $\log_a y = c$. עפ"י הגדרת הלוגריתם נקבל $a^b = x$, $a^c = y$
והמכפלה היא $a^b\cdot a^c = xy$. מצד שני, לפי חוק החזקה (כפל עם בסיסים שווים) נקבל
$a^b\cdot a^c = a^{b+c} = xy$. מכאן, עפ"י הגדרת הלוגריתם, אפשר לכתוב $\log_a(xy) = b+c$
ולכן בסה"כ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

הקנייה

2) לוגריתם של מנת שני מספרים לפי בסיס כלשהו שווה להפרש בין הלוגריתם של המונה ללוגריתם של המכנה לפי אותו בסיס.

בנוסחה:

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

הקנייה

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

(2) נסמן כמו קודם $\log_a x = b$, $\log_a y = c$ ואז $a^b = x$, $a^c = y$. ע"י חילוק ושימוש בחוק החזקה (חילוק עם בסיסים שווים) נקבל $(y \neq 0)$: $\frac{x}{y} = a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$.

לפי הגדרת הלוגריתם אפשר לרשום $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = b - c$, כלומר $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

הקנייה

(3) לוגריתם של חזקה לפי בסיס כלשהו שווה למכפלת מעריך החזקה בלוגריתם של בסיס החזקה לפי אותו בסיס.

בנוסחה:

$$\boxed{\log_a x^n = n \cdot \log_a x}$$

הערה: בחוק (3) n יכול להיות כל מספר.

הקנייה

$$\boxed{\log_a x^n = n \cdot \log_a x}$$

(3) נסמן $\log_a x = b$ ואז $a^b = x$. לפי חוק החזקה של חזקה נקבל $x^n = a^{bn} = (a^b)^n$. מכאן, עפ״י הגדרת הלוגריתם, $\log_a x^n = bn$, אבל $b = \log_a x$
לכן $\log_a x^n = n \log_a x$. (כאמור, בחוק זה n יכול להיות כל מספר).

הקנייה

עבור שורשים נוכל לרשום את החוק באופן הבא:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x}$$

(n מספר טבעי)

הקנייה

דוגמא א':

נתון: $\log 2 - \log 5 + \log 8 = \log x$.   מצא את x.

פתרון:

עפ"י החוקים (1) ו-(2) נקבל: $\log 20 = \log \frac{8 \cdot 5}{2} = \log x$,   לכן $x = 20$.

הקנייה

דוגמא ב׳:

חשב את הערך המספרי של הביטויים הבאים:

(1) $\log_5 15 + \log_5 10 - \log_5 6$ (2) $2\log_{\sqrt{3}} 6 + \log_{\sqrt{3}} 2 - \frac{3}{5}\log_{\sqrt{3}} 32$

פתרונות:

(1) עפ״י החוקים (1) ו-(2) נקבל:

$$\log_5 15 + \log_5 10 - \log_5 6 = \log_5 \frac{15 \cdot 10}{6} = \log_5 25 = 2.$$

הקנייה

$$2\log_{\sqrt{3}}6+\log_{\sqrt{3}}2-\frac{3}{5}\log_{\sqrt{3}}32 \quad (2)$$

(2) עפ"י חוקי הלוגריתמים וחישוב חזקות נקבל:

$$2\log_{\sqrt{3}}6+\log_{\sqrt{3}}2-\frac{3}{5}\log_{\sqrt{3}}32=\log_{\sqrt{3}}6^2+\log_{\sqrt{3}}2-\log_{\sqrt{3}}32^{\frac{3}{5}}=$$

$$=\log_{\sqrt{3}}36+\log_{\sqrt{3}}2-\log_{\sqrt{3}}8=\log_{\sqrt{3}}\frac{36\cdot 2}{8}=\log_{\sqrt{3}}9$$

כדי למצוא את ערך הביטוי האחרון נסמן $\log_{\sqrt{3}}9=x$ ואז $(\sqrt{3})^x=9$,

ז"א $3^{\frac{1}{2}x}=3^2$ ולכן $x=4$.

בהצלחה