תרגיל לדוגמה

שימושים ליחידות ההצגה – צורות מרחביות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 601, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

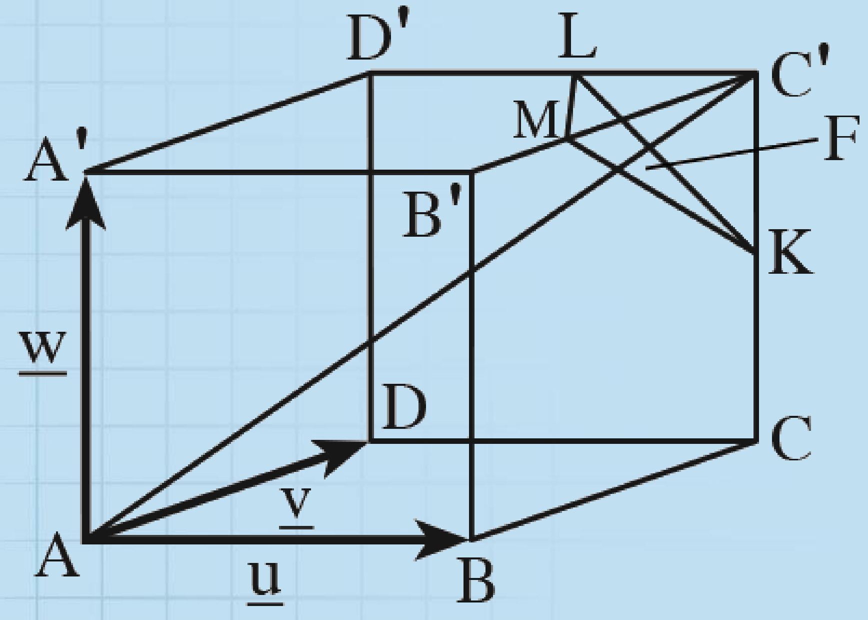
תרגיל לדוגמה

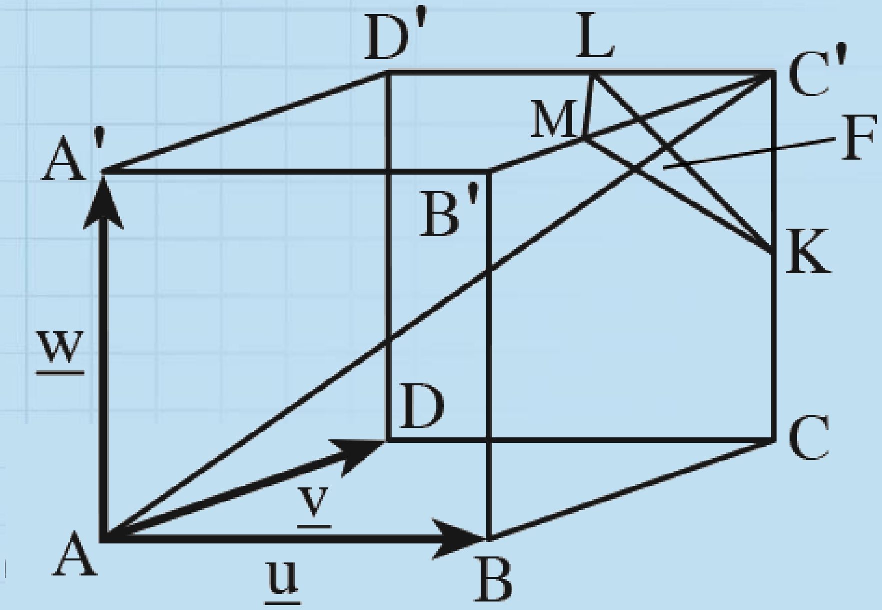
דוגמא א':

בקוביה $ABCDA'B'C'D'$ הנקודות K, L ו-M הן בהתאמה אמצעי המקצועות CC', $D'C'$ ו-$B'C'$.

האלכסון AC' חותך את המישור KLM בנקודה F.

מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה F את האלכסון AC'.





תרגיל לדוגמה

פתרון:

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$. הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ אינם נמצאים במישור אחד, כלומר הם בלתי תלויים ולכן הם **בסיס למרחב**.

הצגה של כל וקטור באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ היא **יחידה**. נביע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים:

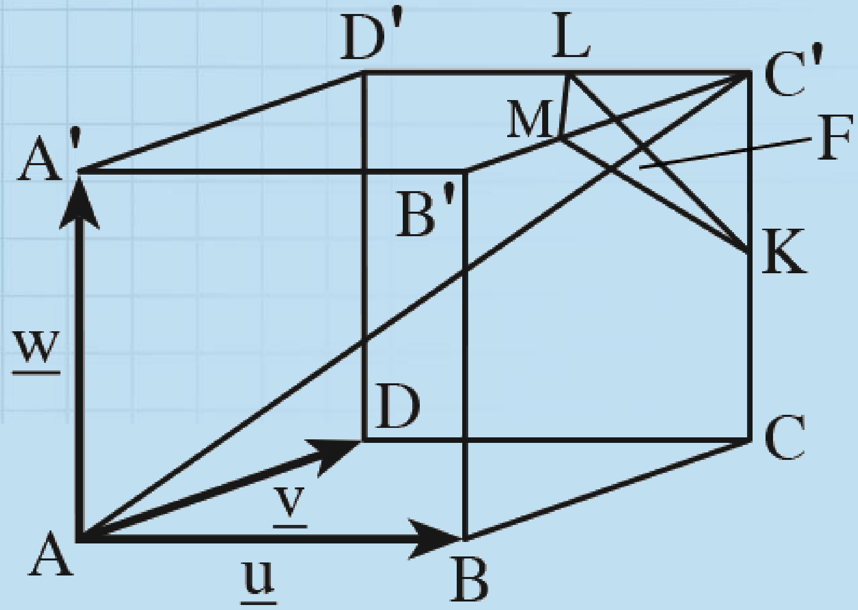
$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w},$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w},$$

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'L} = \underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'M} = \underline{u} + \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}.$$

תרגיל לדוגמה



נביע את $\overrightarrow{AF}$ בשתי דרכים:

דרך אחת – ישנו t עבורו $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AC'}$ ולכן $\overrightarrow{AF} = t(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$.

דרך שנייה – הווקטורים $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AM}$ ו-$\overrightarrow{AF}$ הם בעלי מוצא משותף A וסופיהם **במישור** KLM כך ש-F **בתוך המשולש** KLM. לכן קיימת ההצגה:

$\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AK}+b\overrightarrow{AL}+c\overrightarrow{AM}$ כך ש-$a>0$, $b>0$, $c>0$ ו-$a+b+c=1$. (ראה עמ' 333).

כלומר $\overrightarrow{AF} = a(\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})+b(\underline{w}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u})+c(\underline{u}+\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{v})$.

תרגיל לדוגמה

אם נשווה את שתי ההצגות של $\overrightarrow{AF}$ נקבל:

$$.t(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}) = a(\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})+b(\underline{w}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u})+c(\underline{u}+\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{v})$$

בגלל יחידות ההצגה נקבל ע"י השוואת המקדמים לחוד של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$ את המשוואות הבאות:

(1) $t = a+\frac{1}{2}b+c$, (2) $t = a+b+\frac{1}{2}c$, (3) $t = \frac{1}{2}a+b+c$.

תרגיל לדוגמה

ע"י השוואת משוואות (1) ו-(2) נקבל $b = c$ וע"י השוואת משוואות (2) ו-(3) נקבל $a = c$, כלומר $a = b = c$. היות ו-$a+b+c = 1$ אז $a = b = c = \frac{1}{3}$.

ע"י הצבה במשוואה (1) נקבל $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = t$. לכן $1-t = \frac{1}{6}$. מכאן ש-F מחלקת את AC' ביחס של $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ כלומר $1:5$.

הערה: אותה תוצאה מתקבלת אם הקוביה היא מקבילון כלשהו.

בהצלחה