תרגיל לדוגמה

שימושים ליחידות ההצגה – צורות מישוריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582, עמ' 591–593, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

המשפטים שעליהם מבוססת יחידות ההצגה

יחידות ההצגה מאפשרת להוכיח טענות בגיאומטריה של המישור ושל המרחב.

מציגים את אותו הווקטור **באופנים שונים** בעזרת אותם **וקטורי בסיס ומשווים את המקדמים** של הווקטורים. למעשה אנו מסתמכים על שני **המשפטים** הבאים:

(1) כל שני וקטורים במישור שאינם תלויים זה בזה הם בסיס למישור וכל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה בקומבינציה ליניארית שלהם. כל קומבינציה כזאת נמצאת במישור.

(2) כל שלושה וקטורים בלתי תלויים במרחב הם בסיס למרחב וכל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה בקומבינציה ליניארית שלהם.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

מצא במשולש באיזה יחס מחלק כל תיכון את כל אחד משני התיכונים האחרים.

פתרון:

תהי הנקודה M מפגש התיכונים AD ו-BE במשולש ABC.

נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$. הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ אינם נמצאים על ישר אחד, כלומר הם בלתי תלויים, ולכן הם **בסיס** למישור ABC. הצגה של כל וקטור באמצעות $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ היא **יחידה**. נשים לב שמתקיים $\underline{v}-\underline{u} = \overrightarrow{BC}$, כמו כן AD הוא תיכון ולכן $\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. באותו אופן BE הוא תיכון לכן $-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v} = \frac{1}{2}(-\underline{u})+\frac{1}{2}(\underline{v}-\underline{u}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$.

תרגיל לדוגמה

נניח ש-M מחלקת את התיכון AD ביחס של $t:(1-t)$, כלומר $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD}$.

באופן דומה נניח ש-M מחלקת את BE ביחס של $s:(1-s)$, כלומר $\overrightarrow{BM} = s\overrightarrow{BE}$.

מכאן נקבל: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} = t\cdot\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$, $\overrightarrow{BM} = s\overrightarrow{BE} = s(-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v})$.

נביע את $\overrightarrow{AM}$ בדרך נוספת: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \underline{u}+s(-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}) = (1-s)\underline{u}+\frac{1}{2}s\underline{v}$.

נשווה את התוצאות שקיבלנו עבור $\overrightarrow{AM}$: $\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v} = (1-s)\underline{u}+\frac{1}{2}s\underline{v}$.

תרגיל לדוגמה

בגלל **יחידות ההצגה** נשווה את המקדמים של $\underline{u}$ **לחוד** ואת המקדמים של $\underline{v}$ **לחוד**.

השוואת מקדמי $\underline{\mathbf{u}}$: (1) $\frac{1}{2}t = 1-s$.   **השוואת מקדמי** $\underline{\mathbf{v}}$: (2) $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}t$.

ממשוואה (2) נקבל $t = s$. נציב תוצאה זו במשוואה (1) ונקבל $t = 2-2t$

כלומר $3t = 2$ ולכן $t = \frac{2}{3}$ ואז גם $s = \frac{2}{3}$. מכאן $1-t = \frac{1}{3}$ וכן $1-s = \frac{1}{3}$.

כלומר M מחלקת כל תיכון ביחס של $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$ או $2:1$ כאשר החלק הגדול יותר קרוב לקודקוד.

בהצלחה