הקנייה

המשמעות הגיאומטרית של תלות וקטורים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 582–584

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

המשמעות הגיאומטרית של תלות וקטורים

נסביר עכשיו, לגבי המרחב והמישור, את המובן הגיאומטרי של תלות וקטור ב-n וקטורים כאשר $n = 1, 2, 3$.

הקנייה

$n = 1$, תלות בווקטור אחד השונה מווקטור האפס

התלות של וקטור **בווקטור אחד** השונה מווקטור האפס, כאשר שניהם בעלי מוצא משותף, שקולה למעשה לכך **ששני** הווקטורים נמצאים על **ישר אחד**. בעמ׳ 321 דנו **בתיאור ישר באמצעות וקטור שעליו** וראינו את התנאי לכך ששני וקטורים נמצאים על ישר אחד. נביא כאן את ניסוח המשפט שהופיע בעמ׳ 321 במושגים של תלות.

הקנייה

משפט (1):

יהיו $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ ו- $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ שני וקטורים בעלי מוצא משותף A כך שהווקטור $\underline{u}$ שונה מווקטור האפס. הווקטור $\underline{v}$ תלוי בווקטור $\underline{u}$ אם ורק אם הנקודות A, B ו- C נמצאות על ישר אחד.

הקנייה

$n = 2$, תלות בשני וקטורים שאינם על ישר אחד

התלות של וקטור **בשני וקטורים** שאינם על אותו ישר, כך שכולם בעלי מוצא משותף, שקולה למעשה לכך **ששלושת** הווקטורים נמצאים **במישור אחד**. בעמ׳ 327 דנו **בתיאור מישור באמצעות שני וקטורים שעליו** וראינו את התנאי לכך ששלושה וקטורים נמצאים במישור אחד. נביא כאן את ניסוח המשפט שהופיע בעמ׳ 328 במושגים של תלות.

הקנייה

משפט (2):

יהיו $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ ו- $\underline{w} = \overrightarrow{AD}$ שלושה וקטורים בעלי מוצא משותף A כך שהווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אינם על ישר אחד. הווקטור $\underline{w}$ תלוי בווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אם ורק אם הנקודות A, B, C ו-D נמצאות במישור אחד.

כל וקטור במישור תלוי ליניארית בכל שני וקטורים בעלי מוצא משותף שאינם על ישר אחד.

הקנייה

$n = 3$, תלות בשלושה וקטורים שאינם במישור אחד

משפט (3):

יהיו $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$, $\underline{w} = \overrightarrow{AD}$ ו- $\underline{r} = \overrightarrow{AE}$ ארבעה וקטורים בעלי מוצא משותף A כך שהווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ אינם במישור אחד.
אז: הווקטור $\underline{r}$ תלוי בווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

הקנייה

כל וקטור במרחב תלוי ליניארית בכל שלושה וקטורים בעלי מוצא משותף שאינם במישור אחד.

הקנייה

דוגמא א':

הוכח, בהסתמך על תלות וקטורים, שהנקודות $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(0,1,3)$ ו-$C(1,-1,2)$ אינן נמצאות במישור אחד.

הקנייה

$O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(0,1,3)$ ו-$C(1,-1,2)$

פתרון:

נמצא תחילה את הווקטורים $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ו-$\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OA} = (2,-1,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,1,3)$, $\overrightarrow{OC} = (1,-1,2)$. קל לראות שאין k עבורו $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ לכן הווקטורים $\overrightarrow{OA}$ ו-$\overrightarrow{OB}$ אינם תלויים ליניארית ועל כן אינם נמצאים על ישר אחד, מכאן שהם פורשים מישור.

נבדוק אם הווקטור $\overrightarrow{OC}$ נמצא במישור הנפרש ע"י $\overrightarrow{OA}$ ו-$\overrightarrow{OB}$, כלומר אם $\overrightarrow{OC}$ תלוי ב-$\overrightarrow{OA}$ ו-$\overrightarrow{OB}$. צריך למצוא t ו-s עבורם $(1,-1,2) = t(2,-1,0)+s(0,1,3)$.

המשוואות הן: $1 = 2t$, $-1 = -t+s$, $2 = 3s$. קל לראות שלמשוואות אלה אין פתרון ולכן הווקטור $\overrightarrow{OC}$ אינו תלוי בווקטורים $\overrightarrow{OA}$ ו-$\overrightarrow{OB}$, כלומר הנקודות O, A, B ו-C אינן נמצאות במישור אחד.

בהצלחה