הקנייה

חלוקת קטע ביחס נתון (הווקטור האלגברי)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

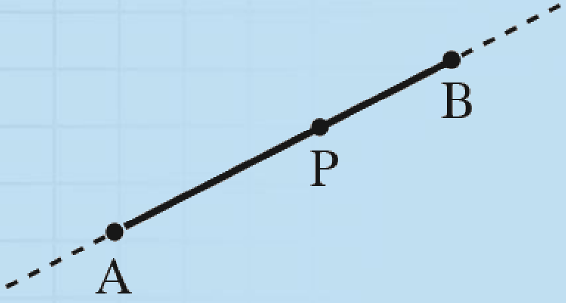
582 , עמ' 413–415

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

הקנייה

חלוקת קטע ביחס נתון (הווקטור האלגברי)

נעבור **למקרה הכללי** של חלוקת קטע.



נניח שנתון קטע AB ונקודה P הנמצאת

בתוך הקטע AB.

נזכיר את **ההגדרה**:

הנקודה P מחלקת את הקטע AB ביחס λ אם מתקיים $\lambda = \frac{AP}{PB}$.

הקנייה

בעזרת וקטורים ננסח זאת כך:

הנקודה P מחלקת את הקטע AB ביחס λ אם מתקיים $\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}}$.

טענה:

אם $A = (a_1, a_2, a_3)$ ו-$B = (b_1, b_2, b_3)$ הן קצות הקטע AB אז שיעורי הנקודה P המחלקת את הקטע AB ביחס של $\frac{AP}{PB} = \lambda$ הם:

$$\boxed{P = \left(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda}, \frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda}, \frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}\right)}$$

הקנייה

הוכחה:

דרך א' – נסתמך על כך שלכל שתי נקודות M ו-N מתקיים $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ כאשר O היא ראשית הצירים. עפ"י הנתון $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ ולכן $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \lambda(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})$,

כלומר $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \lambda(-\overrightarrow{OP}) + \lambda\overrightarrow{OB}$,

ז"א $(1+\lambda)\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$,

ולבסוף $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB})$.

אם נעבור להצגה האלגברית של הווקטורים (כולם יוצאים מראשית הצירים) נקבל את התוצאה הדרושה עבור P.

הקנייה

דרך ב' – אפשר להגיע לאותה תוצאה אם עוברים תחילה להצגה האלגברית.

נסמן $P = (p_1, p_2, p_3)$ ונצא מ- $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$.

נקבל: $(p_1-a_1, p_2-a_2, p_3-a_3) = \lambda(b_1-p_1, b_2-p_2, b_3-p_3)$.

ע"י השוואת השיעור הראשון נקבל: $p_1-a_1 = \lambda b_1-\lambda p_1$,

כלומר $p_1+\lambda p_1 = a_1+\lambda b_1$, לכן $p_1(1+\lambda) = a_1+\lambda b_1$,

ולבסוף $p_1 = \dfrac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda}$.

בצורה דומה מקבלים את השיעורים השני והשלישי של הנקודה P.

הקנייה

במישור נקבל:

אם $A=(a_1,a_2)$ ו-$B=(b_1,b_2)$ הן קצות הקטע AB אז שיעורי הנקודה P המחלקת את הקטע AB ביחס λ הם: $P=\left(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda}\right)$.

הקנייה

הערות:

א) אם נניח ש- $\frac{k}{\ell} = \lambda$, כלומר $\frac{k}{\ell} = \frac{AP}{PB}$, נקבל למשל עבור p_1: $p_1 = \frac{a_1 + \frac{k}{\ell} b_1}{1 + \frac{k}{\ell}}$,

ז"א $p_1 = \frac{\ell a_1 + k b_1}{k + \ell}$. נוכל, אם כן, לרשום את הנוסחאות הבאות $(\lambda = \frac{k}{\ell})$:

במרחב:

$$\boxed{P = \left(\frac{\ell a_1 + k b_1}{k + \ell}, \frac{\ell a_2 + k b_2}{k + \ell}, \frac{\ell a_3 + k b_3}{k + \ell}\right)}$$

במישור:

$$\boxed{P = \left(\frac{\ell a_1 + k b_1}{k + \ell}, \frac{\ell a_2 + k b_2}{k + \ell}\right)}$$

הנוסחה האחרונה מוכרת מהגיאומטריה האנליטית. (ראה עמ' 20).

קל לזכור נוסחאות אלה אם שמים לב שאת a_1, למשל, כופלים ב- ℓ שהוא מתאים לקטע הקרוב ל- b_1 ואת b_1 כופלים ב- k שהוא מתאים לקטע הקרוב ל- a_1.

הקנייה

ב) אם $\lambda = 1$, כלומר $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP}$, אז הנקודה P היא אמצע AB ונקבל את הנוסחה לאמצע קטע שקיבלנו כבר: $P = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

ג) כאשר נאמר שנקודה P מחלקת קטע AB ביחס של $k:\ell$ נתכוון לכך שמתקיים: $AP:PB = k:\ell$.

הקנייה

דוגמא א':

נתונות הנקודות $A = (-2,-1,1)$, $B = (3,4,-9)$. מצא את שיעורי הנקודה P שמחלקת את הקטע AB ביחס של $\frac{3}{2}$, כלומר $AP:PB = 3:2$.

פתרון:

נסמן $\lambda = \frac{k}{\ell} = \frac{3}{2}$ ונקבל:

$$P = \left(\frac{2\cdot(-2)+3\cdot3}{3+2}, \frac{2\cdot(-1)+3\cdot4}{3+2}, \frac{2\cdot1+3\cdot(-9)}{3+2}\right) = (1,2,-5).$$

בהצלחה