הקנייה

הגדרת המכפלה הסקלרית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

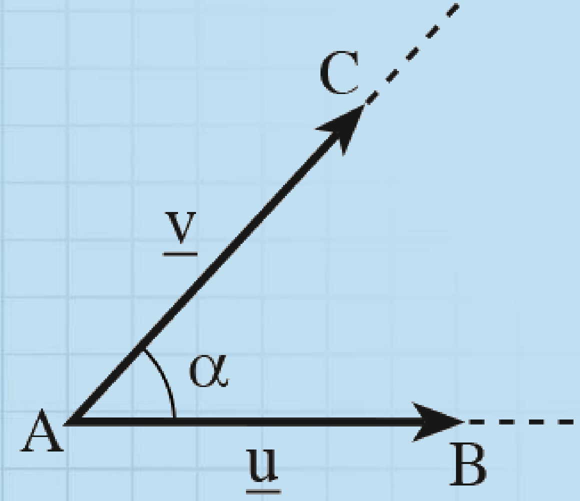
582 , עמ' 336-339

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

הזוית בין שני וקטורים – יהיו $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ו- $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ שני וקטורים השונים מווקטור האפס בעלי מוצא משותף A. הזוית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מוגדרת כזוית שבין הקרניים AB ו-AC.

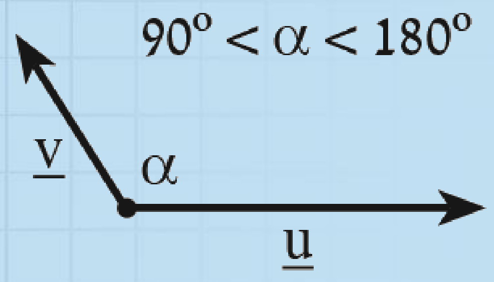
מסמנים את הזוית כך: $\sphericalangle(\underline{v}, \underline{u}) = \alpha$.



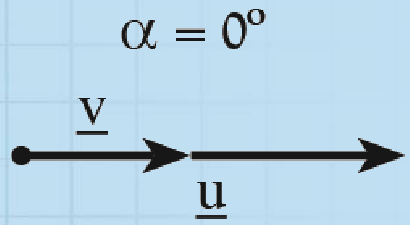
הקנייה

הערות:

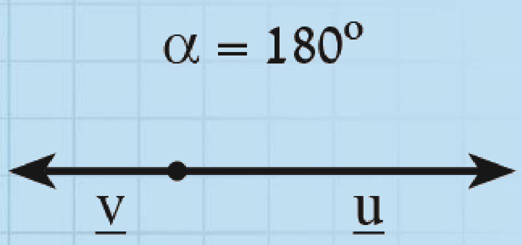
א) הזוית בין שני וקטורים יכולה להיות גם **זוית קהה** שבין 90° ל-180°. אם הזוית נמדדת במעלות אז **תחומה** הוא $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ (אם היא נמדדת ברדיאנים אז $0 \le \alpha \le \pi$).



כאשר $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על **אותו ישר ובאותו כיוון** (הקרניים AB ו-AC מתלכדות) אז הזוית בין הווקטורים היא $\alpha = 0^\circ$.

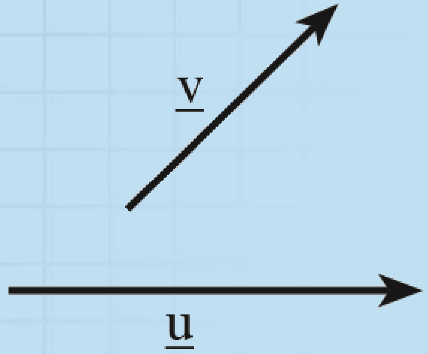


כאשר $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על **אותו ישר** אבל **בכיוונים מנוגדים** הזוית היא $\alpha = 180^\circ$.

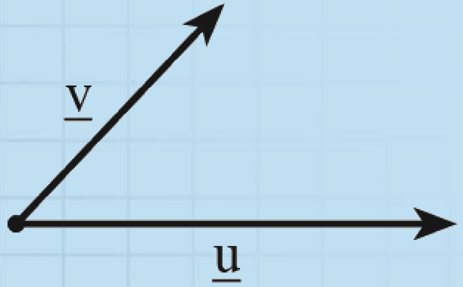


הקנייה

ב) הגדרנו אמנם את הזוית כאשר שני הווקטורים היו בעלי **מוצא משותף**, אבל ניתן בצורה דומה להגדיר גם את הזוית בין שני וקטורים **שאינם בעלי מוצא משותף**. במקרה כזה נוכל **להעתיק** את אחד הווקטורים או את שניהם בהזזה השומרת על הכיוון והאורך של הווקטור כך שמוצאם יהיה **באותה נקודה**.



הזוית שבין שני וקטורים שאינם בעלי מוצא משותף מוגדרת כזוית שבין אותם שני הווקטורים כאשר יש להם מוצא משותף.



הקנייה

האורך של וקטור

למרות שהווקטור מוגדר כקטע בעל כיוון ואורך, הרי שלמעשה עד כה כמעט ולא התייחסנו **לאורך** של הווקטור. נזכיר את ההגדרה:

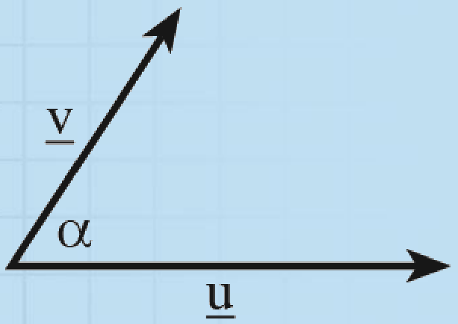
האורך של וקטור – יהי $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ וקטור כלשהו. **אורך הווקטור $\underline{u}$ מוגדר כאורך הקטע AB.**

מקובל **לסמן** את אורך הווקטור $\underline{u}$ בעזרת סימון של **ערך מוחלט** באופן הבא:
$|\underline{u}|$ או גם $|\overrightarrow{AB}|$. היות ואורך הווקטור $\overrightarrow{AB}$ מוגדר כאורך הקטע AB אפשר לסמן את אורך $\overrightarrow{AB}$ גם בסימון: AB או $|AB|$.

הקנייה

הגדרת המכפלה הסקלרית – יהיו $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שני וקטורים, השונים מווקטור האפס ובעלי מוצא משותף, ותהי $\alpha = \measuredangle(\underline{u}\,,\underline{v})$ הזווית שביניהם. לכל שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ כנ"ל מתאימים מספר (סקלר), שיסומן $\underline{u}\cdot\underline{v}$ או $(\underline{u}\,,\underline{v})$, המוגדר באופן הבא:

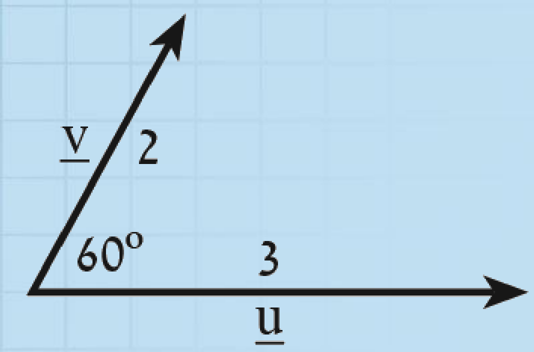
$$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\alpha}$$



המספר נקרא המכפלה הסקלרית של $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

אם $\underline{u} = \underline{0}$ או $\underline{v} = \underline{0}$ מגדירים $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$.

הקנייה



דוגמא א׳ (חישוב המכפלה הסקלרית):

אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 2$

והזוית ביניהם היא $\alpha = 60^o$. חשב את המכפלה

הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

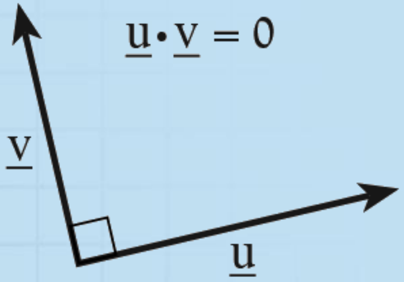
פתרון:

עפ״י ההגדרה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\alpha = 3 \cdot 2 \cos 60^o = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

הקנייה

אם הזווית שבין הווקטורים היא זווית ישרה, כלומר $\alpha = 90^o$, אז $\cos 90^o = 0$ ולכן $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos 90^o = 0$. גם ההיפך נכון: אם $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ושני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שונים מווקטור האפס אז הזווית ביניהם היא זווית ישרה, כי נקבל $|\underline{u}||\underline{v}| \cos\alpha = 0$, אבל $|\underline{u}| \neq 0$ וגם $|\underline{v}| \neq 0$, לכן $\cos\alpha = 0$, ז"א $\alpha = 90^o$.

כאשר הזווית בין שני וקטורים היא **זווית ישרה**, אומרים שהווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ **ניצבים זה לזה** ומסמנים $\underline{v} \perp \underline{u}$ או $\underline{u} \perp \underline{v}$. נוכל **לסכם:**



שני וקטורים השונים מווקטור האפס ניצבים זה לזה אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם שווה לאפס.

(שים לב שהתכונה הנ"ל איננה אופיינית לכפל של מספרים, שהרי אם מכפלה של שני מספרים שווה לאפס אז לפחות אחד מהם שווה לאפס).

בהצלחה