הקנייה

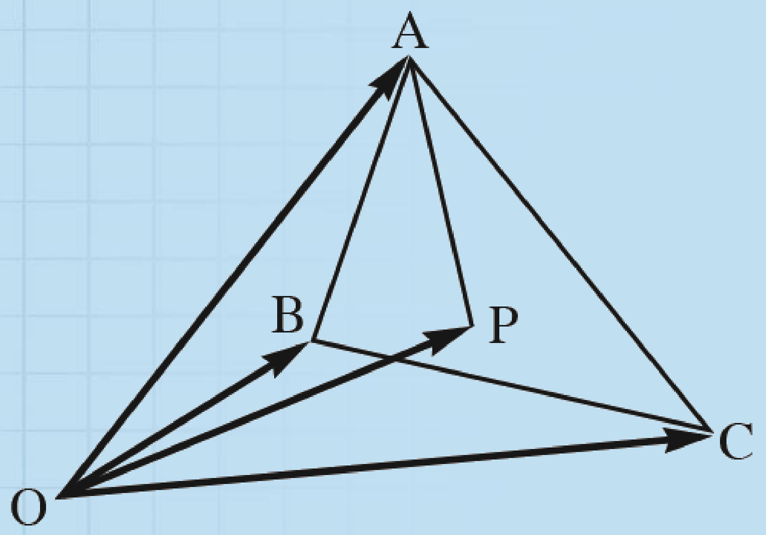
וקטורים שמוצאם בנקודה אחת וסופיהם על מישור (הווקטור הגיאומטרי)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

582 , עמ' 332-334

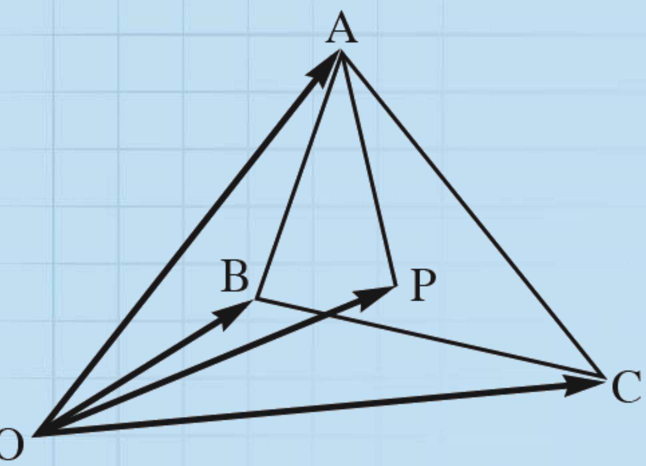
המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה



יהיו $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ו- $\overrightarrow{OC}$ שלושה וקטורים בעלי מוצא משותף O. (הנקודה O היא לא בהכרח ראשית הצירים).
נניח שהנקודות A, B ו-C אינן נמצאות על ישר אחד, במקרה כזה הן קובעות מישור אחד ויחיד ABC. תהי הנקודה P נקודה במישור ABC. נביע את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ באמצעות הווקטורים $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ ו- $\overrightarrow{OB}$. הווקטור $\overrightarrow{AP}$ נמצא במישור הנקבע ע"י הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ לכן קיימים t ו- s שעבורם $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$.

הקנייה



נשים לב שמתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$,

כלומר $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + s(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

לכן $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OA} - s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$

ולבסוף $\overrightarrow{OP} = (1-t-s)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$.

אם נסמן $c = s$, $b = t$, $a = 1-t-s$, נקבל $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$

כך ש-$a+b+c = 1$.

ניתן להוכיח שגם הכיוון ההפוך נכון ולכן נוכל **לסכם**:

הקנייה

משפט:

יהיו $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ ו- $\vec{OP}$ ארבעה וקטורים בעלי מוצא משותף O כך שהנקודות A, B ו-C אינן על ישר אחד. הנקודה P נמצאת במישור ABC אם ורק אם ניתן להציג את הווקטור $\vec{OP}$ בצורה $\boxed{\vec{OP} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}$ כך ש- $\boxed{a+b+c = 1}$.

הערה:

אם בתנאים הנ"ל מתקיים $a+b+c \neq 1$ אז הנקודה P **לא** נמצאת במישור ABC.

הקנייה

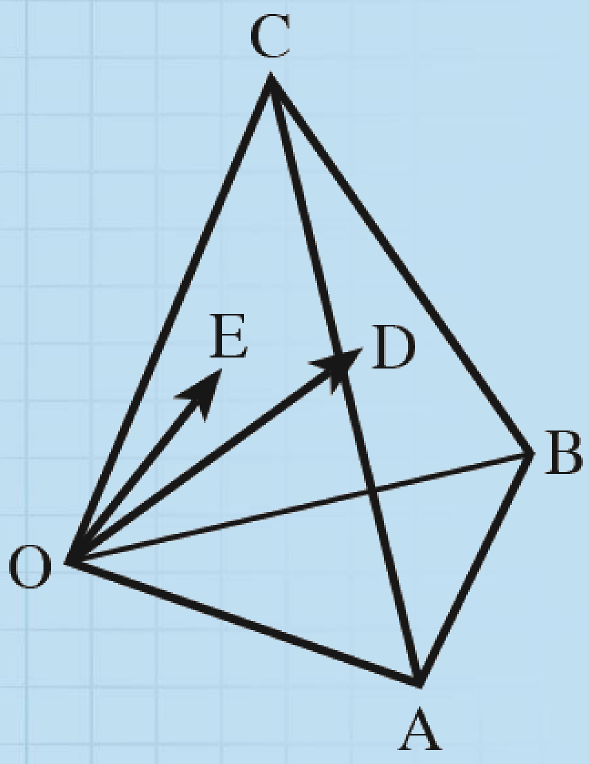
דוגמא:

בטטראדר OABC הנקודה D מקיימת $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{OC}$.

הנקודה E מקיימת $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$.

א. הוכח שהנקודה D נמצאת על הפאה ABC.

ב. הוכח שהנקודה E נמצאת בתוך הטטראדר.

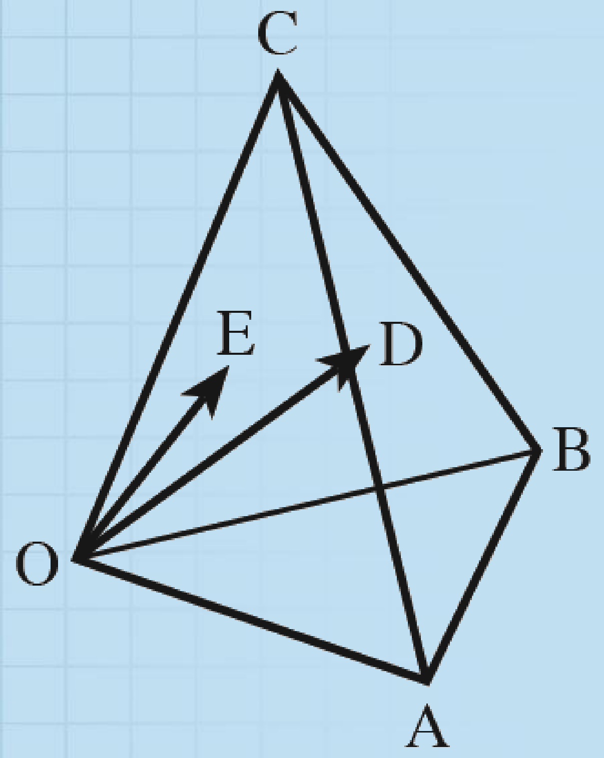


פתרון:

א. אם נסמן $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{12}$ נקבל

$a+b+c = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 1$ לכן הנקודה D נמצאת **במישור** ABC.

הקנייה



דוגמא:

בטטראדר OABC הנקודה D מקיימת $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{OC}$.

הנקודה E מקיימת $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$.

א. הוכח שהנקודה D נמצאת על הפאה ABC.

ב. הוכח שהנקודה E נמצאת בתוך הטטראדר.

ב. אם נסמן $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{6}$ נקבל $a+b+c = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{3}{4}$.

כלומר $a+b+c < 1$ וכולם חיוביים. לכן הנקודה E בתוך הטטראדר OABC.

בהצלחה