הקנייה

וקטורים שמוצאם בנקודה אחת
וסופיהם על ישר (הווקטור הגיאומטרי)

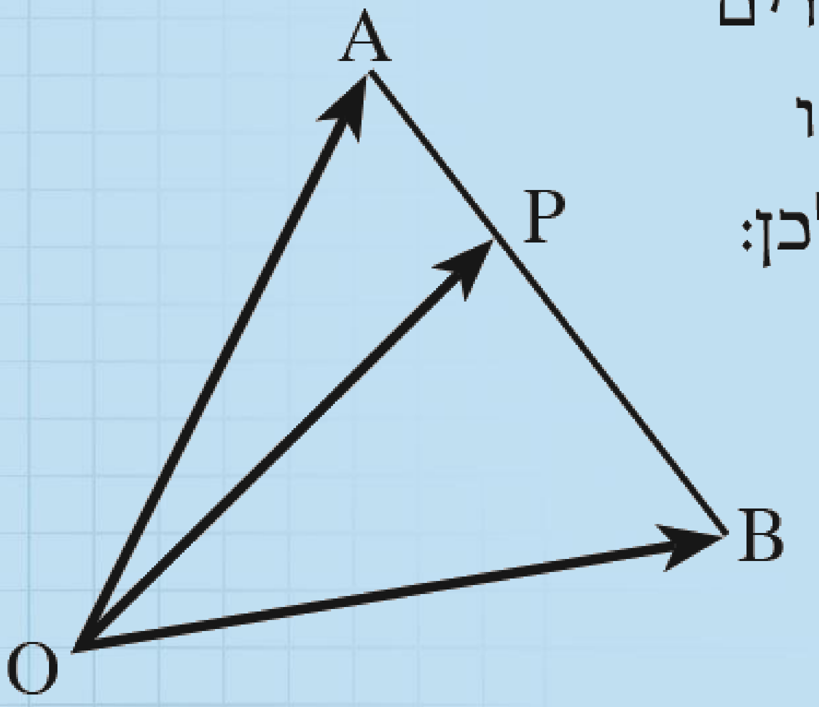
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 323–325

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

יהיו $\overrightarrow{OA}$ ו- $\overrightarrow{OB}$ שני וקטורים בעלי מוצא משותף O.
(הנקודה O איננה בהכרח ראשית הצירים). תהי P נקודה
על הישר AB. נביע את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ באמצעות הווקטורים
$\overrightarrow{OA}$ ו- $\overrightarrow{OB}$. הנקודה P על הישר AB לכן קיים t עבורו
$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$. נשים לב שמתקיים $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, לכן:



הקנייה

אם נסמן $a = 1-t$, $b = t$ נוכל לרשום: $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ ומתקיים $a+b = 1$.

גם **הכיוון ההפוך** נכון, כלומר אם $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ כך ש- $a+b = 1$ אז הנקודה P על הישר AB. כי אם נסמן $1-t = a$, $t = b$ נקבל:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

אבל $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, כלומר קיבלנו $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ וזה מוכיח שהנקודה P על הישר AB כי הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ הם בעלי מוצא משותף A.

נוכל **לסכם**: (הנקודות A ו-B הן נקודות השונות זו מזו).

הקנייה

משפט:

יהיו $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ו- $\overrightarrow{OP}$ שלושה וקטורים בעלי מוצא משותף O. הנקודה P נמצאת על הישר AB אם ורק אם ניתן להציג את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ בצורה $\boxed{\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}$ כך ש- $\boxed{a+b = 1}$.

הקנייה

הערות:

א) הטענה נכונה גם אם הווקטורים $\overrightarrow{OA}$ ו- $\overrightarrow{OB}$ נמצאים על אותו ישר.

ב) המספרים a ו-b בהצגה $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ מראים בדיוק את **היחס** שבו הנקודה P מחלקת את הקטע AB. במקרה כזה מתקיים: $\frac{b}{a} = \frac{AP}{PB}$. כדאי לזכור שאת $\overrightarrow{OA}$ כופלים ב-a שהוא מתאים לקטע הקרוב יותר ל-B ואת $\overrightarrow{OB}$ כופלים ב-b שהוא מתאים לקטע הקרוב יותר ל-A. (ראה על חלוקת קטע ביחס נתון בעמ׳ 413).

ג) אם בנתונים הנ״ל $\mathbf{a+b \neq 1}$ אז הנקודה P **לא** נמצאת על הישר AB.

הקנייה

דוגמא א':

נתונים משולש OAB ונקודה P המקיימת $\overrightarrow{OP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$. הראה שהנקודה P נמצאת על הישר AB.

פתרון:

אם נסמן $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{3}$ נקבל $a+b = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 1$. כלומר מתקיים $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ כך ש-$a+b = 1$. הווקטורים $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ו-$\overrightarrow{OP}$ הם בעלי מוצא משותף O ולכן הנקודה P נמצאת על הישר AB.

הקנייה

קביעת מיקומה של הנקודה P ביחס לקטע AB (הווקטור הגיאומטרי)

נוכל לסכם:

אם $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ כך ש-$a+b=1$ אז:

א) אם $a>0$ וגם $b>0$ אז הנקודה P נמצאת בתוך הקטע AB.

ב) אם $a<0$ ו-$b>1$ אז הנקודה P נמצאת על המשך הקטע AB מהצד של B.

ג) אם $a>1$ ו-$b<0$ אז הנקודה P נמצאת על המשך הקטע AB מהצד של A.

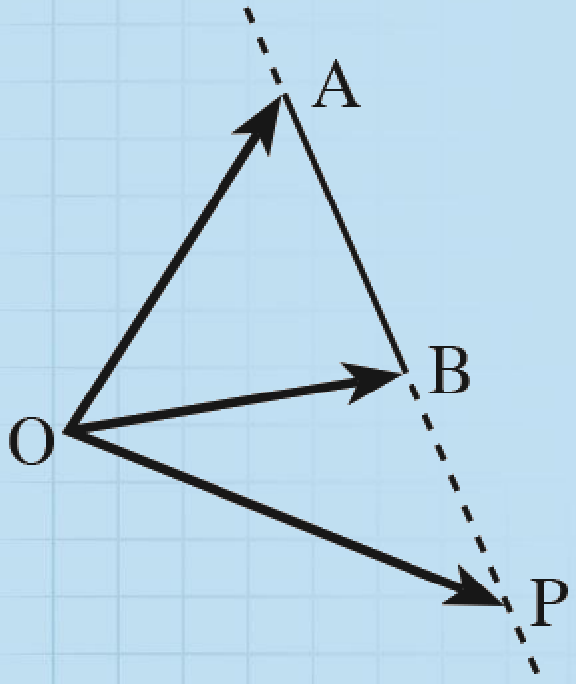
הערה: אם $a=0$ אז הנקודה P מתלכדת עם הנקודה B ואם $b=0$ אז הנקודה P מתלכדת עם הנקודה A.

הקנייה

דוגמא ב׳:

קבע איזו מהנקודות A B ו-P של דוגמא א׳ שבעמ׳ הקודם נמצאת בין שתי האחרות.

נתונים משולש OAB ונקודה P המקיימת $\overrightarrow{OP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$.



פתרון:

כפי שסימנו $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{3}$ לכן $a < 0$ ואילו $b > 1$.

כלומר, אנו נמצאים במקרה ב׳ שבעמ׳ זה ולכן הנקודה P נמצאת על המשך הקטע AB מהצד של B. כלומר B נמצאת בין A ל-P.

בהצלחה