הקנייה

כפל וקטור בסקלר –
הווקטור הגיאומטרי

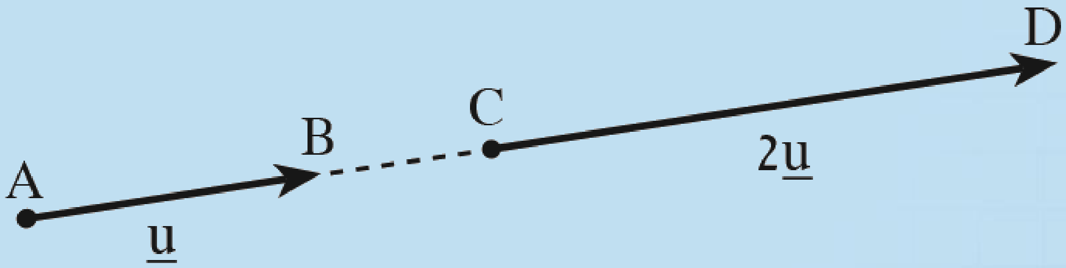
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

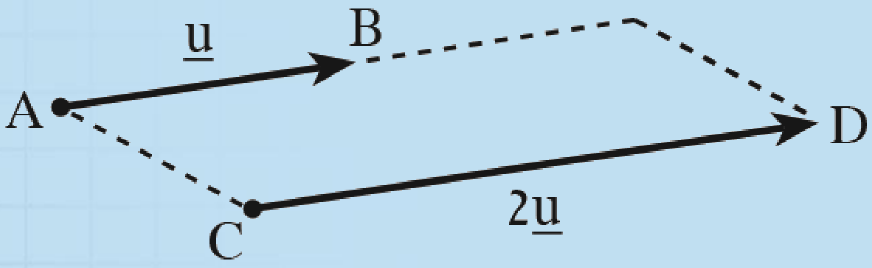
582 , עמ' 300–302

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

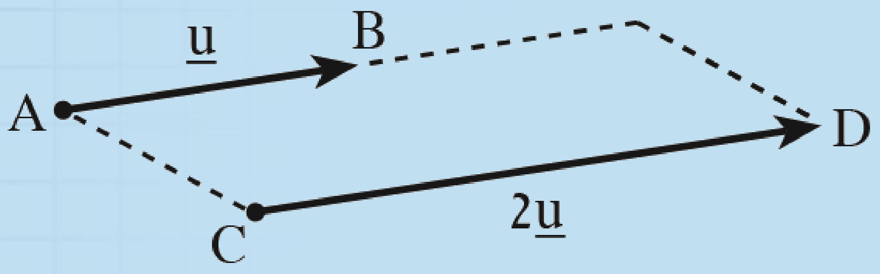
הקנייה

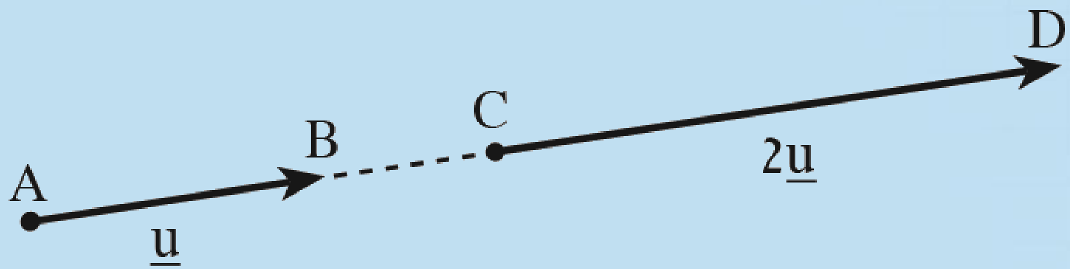
נניח שנתונים שני וקטורים $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ו-$\overrightarrow{CD} = 2\underline{u}$. במקרה כזה $\overrightarrow{CD}$ הוא וקטור על **הישר** **AB** (ראה ציור ימני) או על **ישר המקביל** לו (ראה ציור שמאלי) **בכיוון** של $\overrightarrow{AB}$ שאורכו **כפליים** מהאורך של $\overrightarrow{AB}$. כלומר, יחס אורכי הקטעים CD ו-AB הוא: $\frac{CD}{AB} = 2$.





הקנייה





במילים אחרות: הווקטור $2\underline{u}$ הוא וקטור בכיוונו של הווקטור $\underline{u}$ שאורכו כפליים מאורך הווקטור $\underline{u}$. באופן דומה, הווקטור $3\underline{u}$ הוא וקטור בכיוונו של הווקטור $\underline{u}$ ואורכו גדול פי 3 מאורך הווקטור $\underline{u}$ וכו׳.

הקנייה

כפל וקטור בסקלר – לכל וקטור $\overrightarrow{AB}$ השונה מווקטור האפס ולכל מספר ממשי t הווקטור $\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$ מוגדר כך:

א) אם $t > 0$ אז הווקטור $\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$ הוא כל וקטור על הישר AB או על ישר המקביל לו, בכיוונו של הווקטור $\overrightarrow{AB}$ שאורכו הוא t פעמים האורך של הווקטור $\overrightarrow{AB}$, ז"א $t = \frac{CD}{AB}$.

ב) אם $t < 0$ אז הווקטור $\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$ הוא כל וקטור על הישר AB או על ישר המקביל לו, בכיוון מנוגד לכיוון הווקטור $\overrightarrow{AB}$ שאורכו הוא $|t|$ פעמים האורך של הווקטור $\overrightarrow{AB}$, ז"א $|t| = \frac{CD}{AB}$.

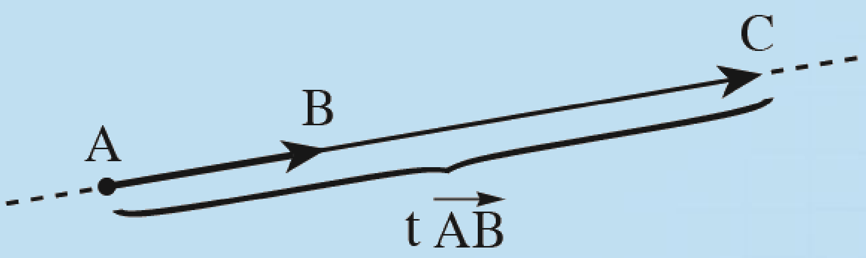
ג) אם $t = 0$ מגדירים $t\overrightarrow{AB} = \underline{0}$.

הקנייה

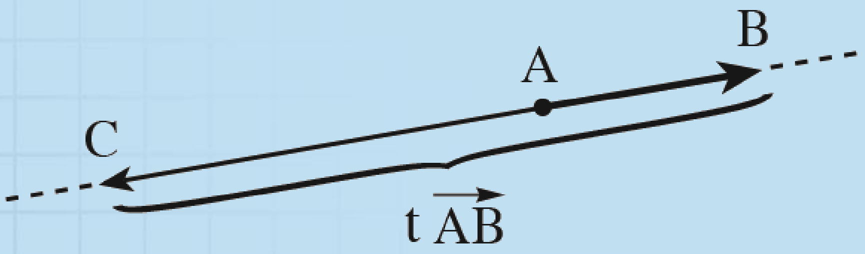
הערה:

מקרה חשוב של כפל וקטור בסקלר מתקבל כאשר הווקטור $t\overrightarrow{AB}$ נמצא על **הישר AB** **ומוצאו בנקודה A**. עפ"י ההגדרה, **לכל** t קיימת נקודה **יחידה** C על הישר AB עבורה $t\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. הציורים שבעמוד הבא מתארים זאת.

א) $t > 0$



ב) $t < 0$



למעשה ניתן **לתאר** בצורה כזאת את כל **נקודות הישר**. (ראה עמ' 420).

הקנייה

נוכל לסכם:

אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים על אותו ישר או על ישרים מקבילים אז קיים t כך שמתקיים $t\underline{u} = \underline{v}$, ולהיפך: אם קיים t כך ש- $t\underline{u} = \underline{v}$ אז $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

הקנייה

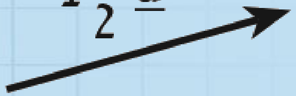
דוגמא א':

נתון הווקטור  . שרטט את הווקטורים $1\frac{1}{2}\underline{u}$ ו- $-\frac{3}{4}\underline{u}$.

פתרון:

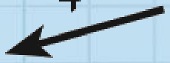
הווקטור $1\frac{1}{2}\underline{u}$ הוא וקטור בכיוון של $\underline{u}$ שאורכו גדול פי $1\frac{1}{2}$ מהאורך של $\underline{u}$.

$1\frac{1}{2}\underline{u}$



הווקטור $\frac{3}{4}\underline{u}$ הוא וקטור בכיוון המנוגד לכיוון של $\underline{u}$ ואורכו הוא $\frac{3}{4}$ מהאורך של $\underline{u}$.

$-\frac{3}{4}\underline{u}$



הקנייה

דוגמא ב׳:

מצא את הווקטור $\underline{x}$ מהמשוואה: $3\underline{v}-5\underline{u} = -\underline{v}+\underline{u}+2\underline{x}$.

פתרון:

ע"י "העברת אגפים" נקבל $3\underline{v}+\underline{v}-5\underline{u}-\underline{u} = 2\underline{x}$, כלומר $4\underline{v}-6\underline{u} = 2\underline{x}$.

נחלק ב-2 ונקבל $2\underline{v}-3\underline{u} = \underline{x}$.

הקנייה

הערה (קומבינציה ליניארית):

אם וקטור $\underline{w}$ ניתן להבעה בעזרת שני וקטורים אחרים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בצורה $\underline{w} = t\underline{u}+s\underline{v}$
כאשר t ו- s הם מספרים (סקלרים) אז אומרים שהווקטור $\underline{w}$ הוא **קומבינציה ליניארית**
של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. וקטור יכול להיות קומבינציה ליניארית של יותר משני וקטורים.

הקנייה

דוגמא ג':

$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$ הם וקטורים. נתון: $\underline{x} = 2\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{y} = -\underline{u} + \frac{3}{2}\underline{v}$.

הבע את $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעזרת $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$, כלומר הבע את $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ כקומבינציה ליניארית של הווקטורים $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$.

הקנייה

$\underline{x} = 2\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{y} = -\underline{u} + \frac{3}{2}\underline{v}$.

פתרון:

נפתור את המערכת של שתי המשוואות עם הווקטורים בדומה לפתרון מערכת של שתי משוואות עם מספרים. נכפול את המשוואה השנייה פי 2 ונקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \underline{x} = 2\underline{u} + \underline{v} \\ 2\underline{y} = -2\underline{u} + 3\underline{v} \end{cases} .$$

אם נחבר את המשוואות עפ"י אגפיהן נקבל $\underline{x} + 2\underline{y} = 4\underline{v}$, לכן $\underline{v} = \frac{1}{4}\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{y}$.

באופן דומה נקבל $\underline{u} = \frac{3}{8}\underline{x} - \frac{1}{4}\underline{y}$.

בהצלחה