הקנייה

מציאת אינטגרל ע"י זיהוי הנגזרת החיצונית והפנימית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב' 2

581 , עמ' 364-365

הקנייה

מציאת אינטגרל ע״י זיהוי הנגזרת החיצונית והפנימית

נלמד בסעיף זה למצוא אינטגרל של פונקציה שהפונקציה הקדומה שלה היא פונקציה **מורכבת**. נעשה זאת ע״י זיהוי הנגזרת **החיצונית** והנגזרת **הפנימית** שבתוך האינטגרל.

הקנייה

מציאת אינטגרל ע"י זיהוי הנגזרת החיצונית והפנימית

דוגמאות:

חשב את האינטגרלים הלא מסויימים של הפונקציות הבאות:

(1) $\int \left(3x^2(x^3+1)^5\right)dx$

(2) $\int \frac{4x+6}{(x^2+3x)^2}dx$

(3) $\int \frac{3x^2+4}{\sqrt{x^3+4x}}dx$

(4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 1}}dx$

הקנייה

$$\int\left(3x^2\left(x^3+1\right)^{\boxed{5}}\right)dx \quad (1)$$

פתרונות:

(1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^3+1$ היא $f'(x)=3x^2$. נסתמך על האינטגרל $\int x^{\boxed{5}}dx=\frac{1}{6}x^6+c$ ונקבל שהפונקציה המורכבת הקדומה היא $g(x)=\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)^6+c$.

בדיקה ע״י גזירה נותנת $g'(x)=\frac{6}{6}\left(x^3+1\right)^5\cdot 3x^2$ וזאת הפונקציה שבתוך האינטגרל.

בסה״כ קיבלנו $\int\left(3x^2\left(x^3+1\right)^5\right)dx=\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)^6+c$.

הקנייה

$$\int \frac{4x+6}{(x^2+3x)^{\boxed{2}}}\,dx \qquad \textbf{(2)}$$

(2) אם נתבונן בפונקציה שבמונה נראה שהיא הנגזרת של הפונקציה שבתוך הסוגריים שבמכנה (עד כדי כפל במספר קבוע) כי מתקיים: $2x+3 = (x^2+3x)'$. עכשיו נסתמך על האינטגרל $\int \frac{1}{x^{\boxed{2}}}\,dx = -\frac{1}{x}+c$ ונקבל לאינטגרל המבוקש: $\int \frac{4x+6}{(x^2+3x)^2}\,dx = -\frac{2}{x^2+3x}+c$.

הקנייה

$$\int \boxed{\frac{3x^2+4}{\sqrt{x^3+4x}}}\, dx \qquad (3)$$

(3) גם כאן הפונקציה שבמונה היא הנגזרת של הפונקציה שבתוך השורש שבמכנה

כי מתקיימים: $3x^2+4 = (x^3+4x)'$. בהסתמך על האינטגרל $\int \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}\, dx = 2\sqrt{x}+c$ נקבל:

$$\int \frac{3x^2+4}{\sqrt{x^3+4x}}\, dx = 2\sqrt{x^3+4x}+c.$$

הקנייה

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 1}}\, dx \quad (4)$$

(4) גם במקרה זה הפונקציה שבמונה היא הנגזרת של הפונקציה שבתוך השורש שבמכנה

(עד כדי כפל במספר קבוע) כי מתקיים: $(\cos x - 1)' = -\sin x$. לכן לאינטגרל נקבל:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 1}}\, dx = -2\sqrt{\cos x - 1} + c.$$

בהצלחה