פתרון תרגיל

חשבון אינטגרלי
תרגילים חזרה

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 493, ת. 4

המצגת נערכה ע"י טל מדר

השאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^{x}$.

נגדיר פונקציה $F(a)$ של a שמוגדרת עבור $a \geq 0$ באופן הבא: $F(a) = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

א. מצא את הפונקציה $F(a)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $F(a)$ עם הישר $y = 4\frac{1}{2}$.

ג. $G(b)$ היא הפונקציה $G(b) = \int_{b}^{0} f(x)\,dx$ והיא מוגדרת עבור $b \leq 0$.

מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $G(b)$.

א. מצא את הפונקציה $F(a)$.

פתרון

$$F(a)=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a (e^{2x}-e^{x})dx=$$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}-e^{x}\right]_0^a=\frac{e^{2a}}{2}-e^{a}-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$\mathbf{F(a)=\frac{e^{2a}}{2}-e^{a}+\frac{1}{2}}$$

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $F(a)$ עם הישר $y = 4\frac{1}{2}$.

פתרון

למציאת נקודת החיתוך של הפונקציה עם הישר נשווה אותם :

$$\frac{e^{2a}}{2} - e^{a} + \frac{1}{2} = 4\ \frac{1}{2}$$

$$e^{2a} - 2e^{a} - 8 = 0$$

נסמן : $t = e^{a} > 0$

$$t^{2} - 2t - 8 = 0$$

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $F(a)$ עם הישר $y = 4\frac{1}{2}$.

פתרון

$t_1 = 4$ $\qquad$ $t_2 = -2$

(לא מתאים)

$\Downarrow$

$e^a = 4$

$a = \ln 4$

נק' החיתוך : $\left(\ln 4\,,\, 4\frac{1}{2}\right)$

ג. $G(b)$ היא הפונקציה $G(b)=\int_b^0 f(x)\,dx$ והיא מוגדרת עבור $b\le 0$. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $G(b)$.

פתרון

$$G(b)=\int_b^0 f(x)dx=\int_b^0 (e^{2x}-e^x)dx=$$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}-e^x\right]_b^0=\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{e^{2b}}{2}-e^b\right)$$

$$G(b)=-\frac{1}{2}-\frac{e^{2b}}{2}+e^b$$

ג. $G(b)$ היא הפונקציה $G(b) = \int_b^0 f(x)\,dx$ והיא מוגדרת עבור $b \le 0$. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $G(b)$.

פתרון

$$G(b) = -\frac{1}{2} - \frac{e^{2b}}{2} + e^b$$

$b \le 0$ לכן עבור $b \to -\infty$

אז $e^b \to 0$ וגם $e^{2b} \to 0$

הישר $y = -\frac{1}{2}$ הוא אסימפטוטה אופקית

בהצלחה