פתרון תרגיל

חשבון אינטגרלי – שטחים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 469, ת. 3

המצגת נערכה ע"י טל מדר

השאלה

נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{16}{e^x+4}$. הנגזרת של הפונקציה היא $f'(x) = \left(\frac{e^x-4}{e^x+4}\right)^2$.

הנגזרת השנייה של הפונקציה היא $f''(x) = \frac{16e^x(e^x-4)}{(e^x+4)^3}$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

ג. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ד. מצא את שיעורי ה-x של נקודת החיתוך של הפונקציות $f'(x)$ ו-$f''(x)$.

ה. חשב את השטח שמוגבל ע״י הגרפים, הפונקציות $f'(x)$ ו-$f''(x)$ וציר ה-y.

(השטח מציר ה-y עד לנקודת החיתוך של שתי הפונקציות שהיא הקרובה יותר לציר ה-y).

ו. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון? נמק.

ז. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול? נמק.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

פתרון

נסמן: $g(x) = f'(x) = \left(\frac{e^x-4}{e^x+4}\right)^2$

תחום ההגדרה הוא: כל x

$$g'(x) = f''(x) = \frac{16e^x(e^x-4)}{(e^x+4)^3}$$

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

פתרון

$$\frac{16e^x(e^x-4)}{(e^x+4)^3} = 0$$

פתרון המשוואה הוא : $X = \ln 4$

מכנה הנגזרת : $(e^x + 4)^3 > 0$ וגם $16e^x > 0$ לכל x.

כדי לקבוע את סוג הקיצון מספיק לגזור את הביטוי $(e^x - 4)$

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

פתרון

$(e^x - 4)' = e^x > 0$ לכל x ⬅ $g'(\ln 4) > 0$

נקודה שבה $x = \ln 4$ היא נקודת מינימום.

$$g(\ln 4) = f'(\ln 4) = \left(\frac{e^{\ln 4} - 4}{e^{\ln 4} + 4}\right)^2$$

$$g(\ln 4) = 0$$

הנקודה $(\ln 4, 0)$ היא נקודת מינימום של $f'(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

פתרון

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x - 4}{e^x + 4}\right)^2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{4}{e^x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1 - \frac{4}{e^x}}{1 + \frac{4}{e^x}}\right)^2$$

אם $x \to \infty$ אז $e^x \to \infty$ לכן $\frac{1}{e^x} \to 0$

מכאן נקבל ש- $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$

הישר $y = 1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f'(x)$

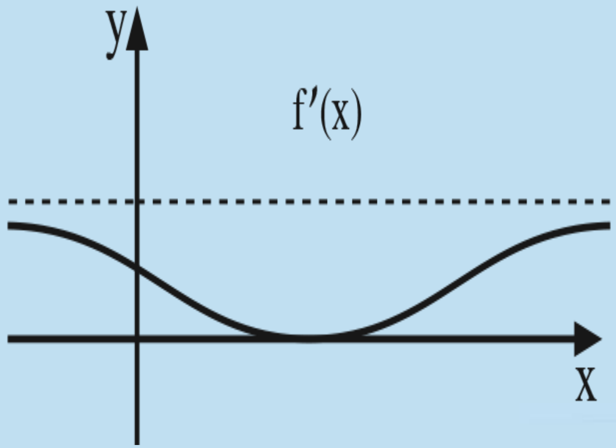
ג. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פתרון

לפונקציה $g(x) = f'(x) = \left(\frac{e^x-4}{e^x+4}\right)^2$

אין אסימפטוטה אנכית , היא חיובית לכל x

יש נקודת מינימום $(\ln 4 , 0)$ ואסימפטוטה אופקית $y = 1$



ד. מצא את שיעורי ה-x של נקודת החיתוך של הפונקציות $f'(x)$ ו-$f''(x)$.

פתרון

$$\left(\frac{e^x-4}{e^x+4}\right)^2=\frac{16e^x(e^x-4)}{(e^x+4)^3}$$

$$(e^x-4)[(e^x-4)\cdot(e^x+4)-16e^x]=0$$

$$(e^x-4)(e^{2x}-16e^x-16)=0$$

הפתרונות המשוואה הם : $X=\ln 4\ ,\ X=2.83$

ה. חשב את השטח שמוגבל ע"י הגרפים, הפונקציות $f'(x)$ ו-$f''(x)$ וציר ה-y.
(השטח מציר ה-y עד לנקודת החיתוך של שתי הפונקציות שהיא הקרובה יותר לציר ה-y).

פתרון

$$\ln 4 < 2.83$$

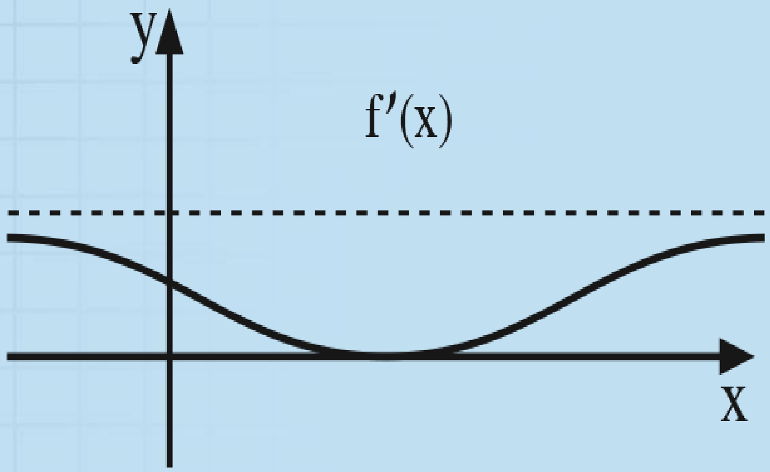
$$S = \left|\int_0^{\ln 4}[f'(x) - f''(x)]\,dx\right| = \left|[f(x) - f'(x)]\right|_0^{\ln 4} =$$

$$\left|\left[\ln 4 + \frac{16}{e^{\ln 4}+4} - \left(\frac{e^{\ln 4}-4}{e^{\ln 4}+4}\right)^2\right] - \left[0 + \frac{16}{e^{0}+4} - \left(\frac{e^{0}-4}{e^{0}+4}\right)^2\right]\right| =$$

$$\left|\ln 4 + 2 - 0 - \frac{16}{5} + \left(\frac{-3}{5}\right)^2\right| = \mathbf{\ln 4 - \frac{21}{25}}$$ **יחידות שטח**

ו. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון? נמק.

פתרון

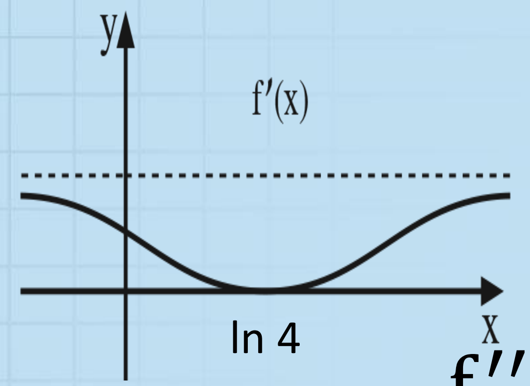


הפונקציה $f'(x) > 0$ לכל $x \neq \ln 4$

לכן לפונקציה $f(x)$ אין נקודת קיצון

ז. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול? נמק.

פתרון



$f''(x) = 0$, אם $x = \ln 4$

עבור $x < \ln 4$ הפונקציה $f'(x)$ יורדת, לכן $f''(x) < 0$

עבור $x > \ln 4$ הפונקציה $f'(x)$ עולה, לכן $f''(x) > 0$

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול.

בהצלחה