הקנייה

מרחק נקודה מישר

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

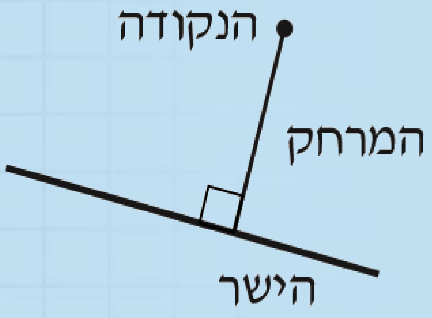
582 , עמ' 543–546

המצגת נערכה ע"י טל מדר

הקנייה

ההגדרה של מרחק נקודה מישר

המרחק בין נקודה לישר זהו אורכו של האנך מהנקודה לישר.



נדגיש מייד שיש הבדל במציאת המרחק אם מדובר על **ישר במישור** או על **ישר במרחב**. הסיבה היא, שבמישור יש לישר משוואה כללית מהצורה $ax+by+c=0$ ואילו במרחב יש לו הצגה פרמטרית בלבד.

הקנייה

מרחק נקודה מישר במישור

הנוסחה לחישוב **מרחק נקודה מישר במישור** ידועה מהגיאומטריה האנליטית

מרחק הנקודה (x_1, y_1) מהישר $ax+by+c=0$ הוא: $\boxed{\dfrac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

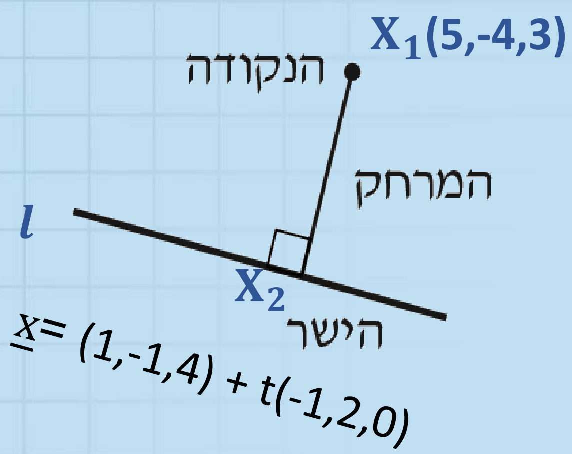
הקנייה

מרחק נקודה מישר במרחב

דוגמא א':

חשב את מרחק הנקודה $X_1 = (5,-4,3)$ מהישר שהצגה פרמטרית שלו היא $\ell: \underline{x} = (1,-1,4)+t(-1,2,0)$.

הקנייה



פתרון:

דרך א'

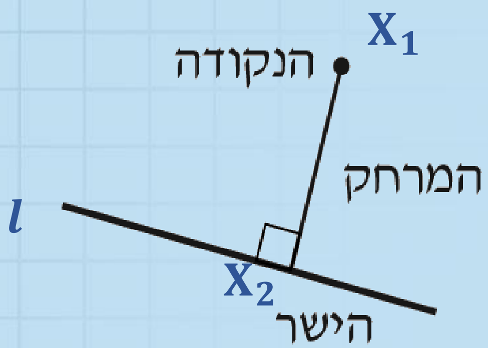
נקודה אופיינית על הישר ℓ היא $X_2 = (1-t\,,-1+2t\,,4)$.

נביע את אורך $|\overrightarrow{X_1X_2}|^2$ באמצעות t:

$$|\overrightarrow{X_1X_2}|^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 = (1-t-5)^2+(-1+2t+4)^2+(4-3)^2 =$$

$$= (-t-4)^2+(2t+3)^2+1^2 = 5t^2+20t+26$$

הקנייה



מרחק הנקודה X_1 מהישר ℓ הוא **המרחק המינימלי**

מבין כל המרחקים של X_1 מנקודה כלשהי על הישר.

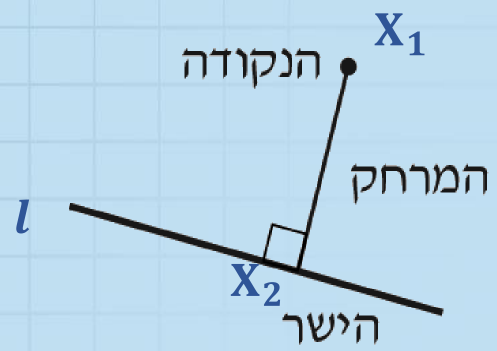
ניעזר **בחשבון הדיפרנציאלי** ונמצא **מינימום לפונקציה**

$f(t) = 5t^2+20t+26$.

הנגזרת היא $f'(t) = 10t+20$

ואם נשווה לאפס נקבל ש- $t = -2$.

הקנייה



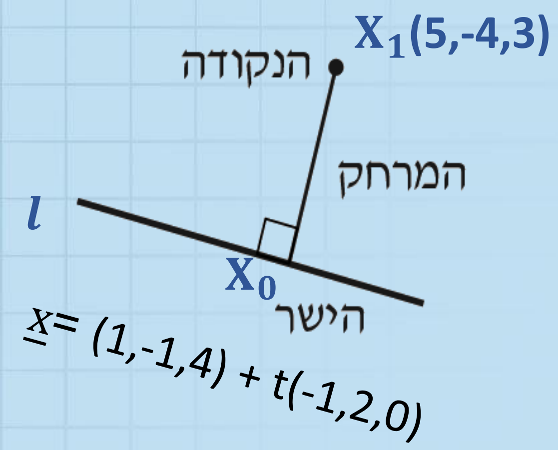
קל לראות שזהו ערך מינימום.

המרחק של הנקודה X_1 מהישר ℓ הוא $\sqrt{f(t)} = \sqrt{5t^2 + 20t + 26}$

עבור $t = -2$,

כלומר: $\sqrt{6} = \sqrt{20-40+26} = \sqrt{5\cdot(-2)^2 + 20\cdot(-2) + 26} = \sqrt{f(-2)}$.

הקנייה



דרך ב׳

תהי הנקודה X_0 **היטל הנקודה** X_1 על הישר ℓ.

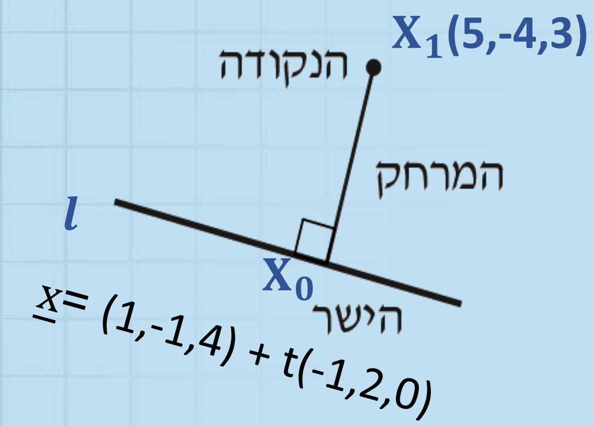
הנקודה X_0 על הישר ℓ

ולכן שיעוריה הם, כמו קודם, $X_0 = (1-t, -1+2t, 4)$ עבור t מסויים.

הווקטור $\overrightarrow{X_1X_0}$ הוא:

$$\overrightarrow{X_1X_0} = (1-t-5, -1+2t+4, 4-3) = (-t-4, 2t+3, 1).$$

הקנייה



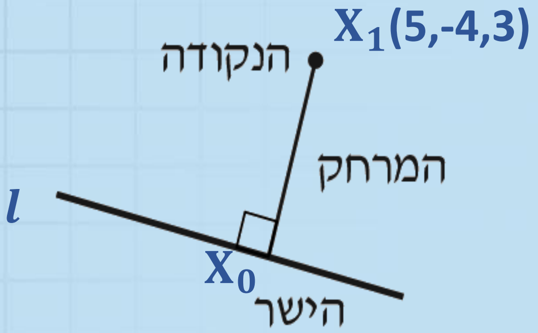
וקטור כיוון של הישר הוא $\underline{u} = (-1,2,0)$.

הווקטורים $\overrightarrow{X_1X_0}$ ו- $\underline{u}$ ניצבים זה לזה ולכן:

$$\underline{u} \cdot \overrightarrow{X_1X_0} = (-1,2,0)\cdot(-t-4,2t+3,1) = t+4+4t+6 = 5t+10 = 0$$

ומכאן $t = -2$.

הקנייה



$\overrightarrow{X_1X_0} = (-t-4\,,\,2t+3\,,\,1)$.

נחשב את אורך $\overrightarrow{X_1X_0}$ ע״י שנציב $t=-2$:

$|\overrightarrow{X_1X_0}| = \sqrt{(2-4)^2+(-4+3)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

בהצלחה