הקנייה

הזווית בין שני מישורים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

582 , עמ' 535-536,
דוגמאות א' , ב'

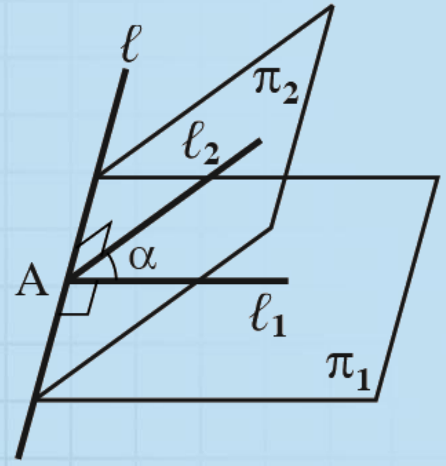
המצגת נערכה ע"י טל מדר

הזוית בין שני מישורים

הגדרת הזוית שבין שני מישורים

נדון עכשיו בזוית שבין שני מישורים. יהיו π_1 ו-π_2 שני מישורים הנחתכים לאורך ישר ℓ. בנקודה כלשהי A, על ישר החיתוך ℓ, נעביר שני ישרים: ישר ℓ_1 **המוכל** במישור π_1 **וניצב** לישר ℓ, ויישר ℓ_2 **המוכל** במישור π_2 **וניצב** לישר ℓ.

נזכיר את ההגדרה:



הזוית בין שני מישורים – הזוית α בין הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 המוכלים בהתאמה במישורים π_1 ו-π_2 והניצבים לישר החיתוך ℓ היא הזוית שבין המישורים π_1 ו-π_2.

ההתייחסות היא לזוית **החדה** שבין המישורים.

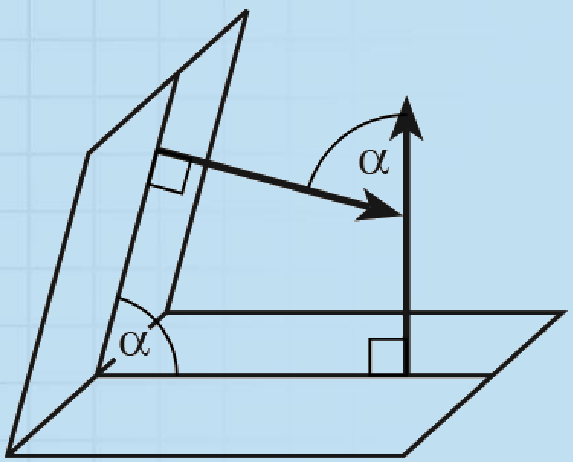
את הזוית שבין המישורים π_1 ו-π_2 מסמנים ע"י $\measuredangle(\pi_1, \pi_2)$.

הקנייה

חישוב הזווית שבין שני מישורים

היות ואנו יודעים לחשב זוית שבין שני ישרים נוכל לחשב גם את הזווית שבין שני מישורים. גם במקרה זה נוח יותר לחשב את הזווית שבין **הניצבים למישורים** מאשר את הזוית שבין המישורים. למעשה נסתמך על **המשפט**:

הזוית בין שני מישורים שווה לזווית שבין הניצבים למישורים.



הקנייה

נפתח עכשיו נוסחה שתאפשר לנו לחשב את הזוית בין שני מישורים הנתונים ע״י המשוואה הכללית שלהם. נמצא את הזוית הכלואה בין המישורים שמשוואותיהם הן:

$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

הווקטורים $\underline{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$ ו-$\underline{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ ניצבים למישורים π_1 ו-π_2 בהתאמה. לכן (עפ״י המשפט הנ״ל):

$$\cos\sphericalangle(\pi_1,\pi_2)=|\cos\sphericalangle(\underline{u}_1,\underline{u}_2)|=\frac{|\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1||\underline{u}_2|}=$$

$$=\frac{|(a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2,b_2,c_2)|}{|(a_1,b_1,c_1)||(a_2,b_2,c_2)|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

הקנייה

לסיכום:

הזווית α שבין המישורים $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

ו-$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ מקיימת:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

הקנייה

דוגמא א':

מצא את הזווית שבין המישורים

$\pi_1: 2x+y-z+2=0$, $\pi_2: x-3y+2z-5=0$.

הקנייה

פתרון:

הווקטורים $\underline{u}_1 = (2,1,-1)$ ו-$\underline{u}_2 = (1,-3,2)$ ניצבים למישורים π_1 ו-π_2 בהתאמה.

$$\cos\sphericalangle(\pi_1,\pi_2) = |\cos\sphericalangle(\underline{u}_1,\underline{u}_2)| = \frac{|\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|\,|\underline{u}_2|}$$

$$\cos\sphericalangle(\pi_1,\pi_2) = \frac{|2\cdot1+1\cdot(-3)-1\cdot2|}{\sqrt{4+1+1}\,\sqrt{1+9+4}} = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{14}}$$

ולכן $\sphericalangle(\pi_1,\pi_2) = 70.89^{\circ}$.

הקנייה

דוגמא ב':

חשב את הזווית שבין המישורים:

$$\pi_1: \ \underline{x} = (-1,2,0)+t(1,1,-1)+s(1,0,-3),$$

$$\pi_2: \ \underline{x} = (0,1,-3)+m(3,1,0)+n(-1,0,2).$$

הקנייה

פתרון:

אם $\underline{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ הוא וקטור הניצב לווקטורים $(1, 1, -1)$ ו-$(1, 0, -3)$

הפורשים את המישור π_1 , נקבל $\underline{u}_1 = (3, -2, 1)$.

כמו כן אם $\underline{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ הוא וקטור הניצב לווקטורים

$(3, 1, 0)$ ו-$(-1, 0, 2)$

הפורשים את המישור π_2 אז נקבל $\underline{u}_2 = (2, -6, 1)$.

הקנייה

$\underline{u}_1 = (3,-2,1)$. $\underline{u}_2 = (2,-6,1)$.

$$\cos\measuredangle(\pi_1,\pi_2) = |\cos\measuredangle(\underline{u}_1,\underline{u}_2)| = \frac{|\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|\,|\underline{u}_2|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|(3,-2,1)\cdot(2,-6,1)|}{\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{4+36+1}} = \frac{6+12+1}{\sqrt{14}\,\sqrt{41}} = \frac{19}{\sqrt{574}}$$

לזווית α שבין המישורים נקבל:

ולכן $\alpha = 37.53^o$.

בהצלחה