הקנייה

המצב ההדדי של שני ישרים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

582 , עמ' 486, דוגמא א'

הקנייה

המצב ההדדי של שני ישרים במרחב

בפרק זה נדון במצב ההדדי של ישרים ומישורים במרחב התלת מימדי.

הערה: על המצב ההדדי של שני ישרים במישור הדו מימדי ניתן לראות החל מעמ׳ 33 בפרק על הישר שבגיאומטריה אנליטית.

נדון עכשיו במצב ההדדי של שני ישרים במרחב התלת מימדי. כאן, בנוסף לשלוש האפשרויות הקיימות במישור, קיימת גם אפשרות נוספת והיא שהישרים **לא יחתכו** זה את זה אבל גם **לא יקבילו** זה לזה. במקרה כזה אומרים שהישרים **מצטלבים**.

נשים לב **להבדל** שבין ישרים **מקבילים** לישרים **מצטלבים**. בשני המקרים **אין** לישרים נקודה **משותפת**, ההבדל הוא, שכאשר הישרים מקבילים **ישנו מישור יחיד** המכיל אותם. וזהי אחת הדרכים לקביעת מישור (ראה עמ׳ 327). לעומת זאת, כאשר הישרים מצטלבים **אין מישור** המכיל אותם. אם היה מישור כזה – הישרים היו נחתכים.

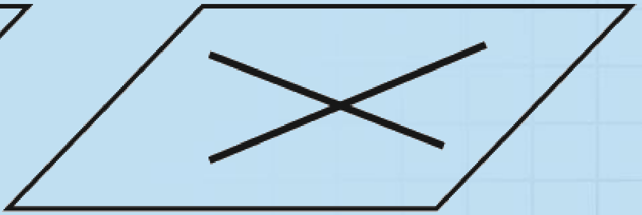
הקנייה

נסכם:

קיימות **ארבע** אפשרויות לגבי מצבם ההדדי של **שני ישרים במרחב** (ראה ציורים למטה):

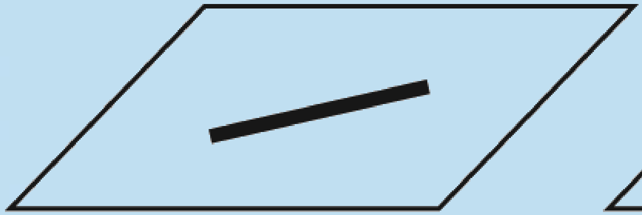
(א) **הישרים נחתכים – יש להם נקודה אחת משותפת וישנו מישור המכיל אותם.**
(ב) **הישרים מקבילים – אין להם אף נקודה משותפת וישנו מישור המכיל אותם.**
(ג) **הישרים מתלכדים לישר אחד – יש להם אינסוף נקודות משותפות.**
(ד) **הישרים מצטלבים – אין להם אף נקודה משותפת ואין מישור המכיל אותם.**

א) הישרים נחתכים

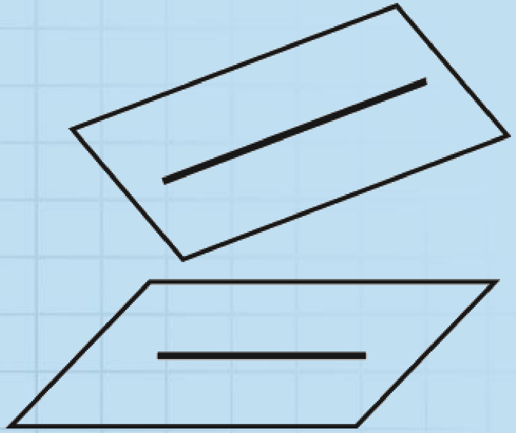


ב) הישרים מקבילים

ג) הישרים מתלכדים



ד) הישרים מצטלבים



הקנייה

קביעת המצב ההדדי של שני ישרים במרחב

תהיינה $\ell_1: \underline{x} = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו-$\ell_2: \underline{x} = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ הצגות פרמטריות של שני ישרים במרחב. כדי לקבוע את מצבם ההדדי **משווים** את הצגותיהם הפרמטריות, כלומר $\underline{a}_2 + s\underline{u}_2 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$. מתקבלות **שלוש משוואות עם שני נעלמים** t ו-s.

א) **אם לשלוש המשוואות יש פתרון יחיד – הישרים נחתכים.**

ב) **אם לשלוש המשוואות אין פתרון – הישרים מקבילים או מצטלבים. כדי לקבוע איזו אפשרות מתקיימת צריך לבדוק את וקטורי הכיוון שלהם. אם קיים סקלר k עבורו $\underline{u}_2 = k\underline{u}_1$ אז הישרים מקבילים. אם לא קיים k כנ"ל אז הישרים מצטלבים.**

ג) **אם לשלוש המשוואות יש אינסוף פתרונות – הישרים מתלכדים.**

הקנייה

דוגמא א':

קבע **במרחב** את המצב ההדדי של הישרים:

$\ell_1:\ \underline{x} = (0,1,2)+t(3,-1,1)$, $\ell_2:\ \underline{x} = (-6,3,0)+s(-6,2,-2)$.

הקנייה

פתרון:

נשווה את ההצגות הפרמטריות: $(-6,3,0)+s(-6,2,-2) = (0,1,2)+t(3,-1,1)$.

המשוואות המתקבלות הן:

(1) $3t = -6-6s$, **(2)** $1-t = 3+2s$, **(3)** $2+t = -2s$.

נחלץ את t ממשוואה (3) ונקבל $t = -2-2s$.

הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נותנת $1+2+2s = 3+2s$,

$0 = 0$ וזה תמיד נכון.

הקנייה

הצבת אותה התוצאה במשוואה (1) $3t = -6-6s$,

נותנת $3(-2-2s) = -6-6s$,

כלומר $0 = 0$.

לכן יש למערכת **אינסוף** פתרונות והיא מתקיימת לכל t ו-s,

מכאן שהישרים **מתלכדים**.

בהצלחה