פתרון תרגיל

מכפלה סקלרית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 450, ת. 12

המצגת נערכה ע״י טל מדר

השאלה

בתרגילים הבאים נתונים שלושה וקטורים.   מצא :

א) וקטור היוצר איתם זויות שוות.

ב) את הזוית השווה (החדה).

12) $(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$.

מצא: **א)** $(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. וקטור היוצר איתם זויות שוות.

פתרון

<u>נסמן</u> את הווקטורים הנתונים : $\underline{u} = (7,3,2)$ $\underline{v} = (5,6,1)$ $\underline{w} = (2,-3,7)$

$\underline{x} = (a,b,c)$ הוא ווקטור , היוצר איתם זוויות שוות α

למציאת זווית בין שני ווקטורים נשתמש בנוסחה של מכפלה סקלרית :

$$\cos\alpha = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{|\underline{x}| \cdot |\underline{y}|}$$

$(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. מצא: **א)** וקטור היוצר איתם זויות שוות.

פתרון

כדי לקבל ביטוי לקוסינוס של זווית בין שני ווקטורים, נשתמש בנוסחאות:

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_3 \qquad |\underline{\mathbf{x}}| = \sqrt{(\mathbf{x}_1{}^2 + \mathbf{x}_2{}^2 + \mathbf{x}_3{}^2}$$

עבור הווקטורים $\underline{x} = (a, b, c)$ $\quad \underline{u} = (7,3,2)$

$$\cos\alpha = \frac{7a + 3b + 2c}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. מצא: **א)** וקטור היוצר איתם זויות שוות.

פתרון

עבור הווקטורים $\underline{v} = (5,6,1)$ $\underline{x} = (a,b,c)$

$$\cos\alpha = \frac{5a+6b+c}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

עבור הווקטורים $\underline{w} = (2,-3,7)$ $\underline{x} = (a,b,c)$

$$\cos\alpha = \frac{2a-3b+7c}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. מצא: **א)** וקטור היוצר איתם זויות שוות.

פתרון

ע"י השוואת הקוסינוסים של זוויות שוות נקבל:

$$\frac{7a+3b+2c}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{5a+6b+c}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2a-3b+7c}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

נבטל את המכנים השווים ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 7a+3b+2c = 5a+6b+c \\ 7a+3b+2c = 2a-3b+7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2a+3b \\ 5a+6b = 5c \end{cases}$$

א) מצא: $(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. וקטור היוצר איתם זויות שוות.

פתרון

$$c = -2a + 3b \quad (1)$$

$$5a + 6b = 5c \quad (2)$$

$$5a + 6b = 5(-2a + 3b)$$

$$5a + 6b = -10a + 15b$$

$$a = \frac{3}{5}b$$

הצבת a למשוואה ה-1 נותנת:

$$c = -2 \cdot \frac{3}{5}b + 3b$$

$$c = \frac{9}{5}b$$

$(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. מצא: **א)** וקטור היוצר איתם זויות שוות.

פתרון

$$a = \frac{3}{5}b \qquad c = \frac{9}{5}b$$

אם נציב $b = 5$ אז הווקטור המתקבל הוא:

$$\underline{x} = (3,5,9)$$

$(7,3,2)$, $(5,6,1)$, $(2,-3,7)$. מצא: **ב)** את הזוית השווה (החדה).

פתרון

נחשב את הזווית בין הווקטורים: $\underline{x} = (3,5,9)$ $\underline{u} = (7,3,2)$

$$\cos\alpha = \frac{7\cdot 3 + 3\cdot 5 + 2\cdot 9}{\sqrt{7^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2+9^2}} = \frac{54}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{115}}$$

$$\alpha = 50.24°$$

בהצלחה