פתרון תרגיל

מכפלה סקלרית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 446, ת. 46

המצגת נערכה ע״י טל מדר

השאלה

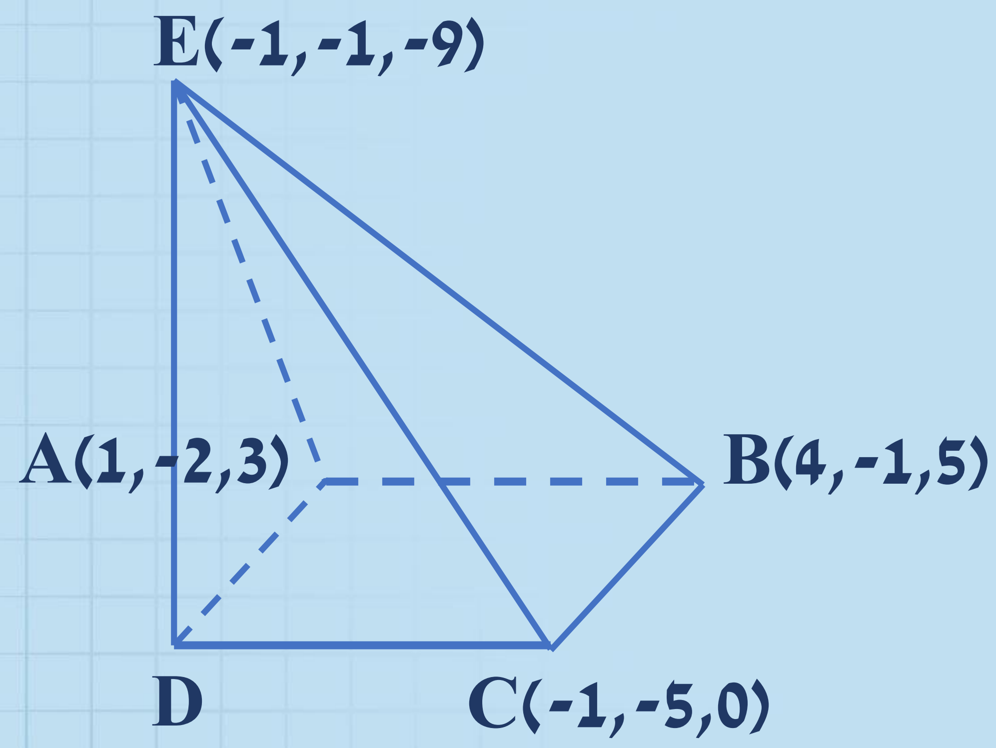
46) בפירמידה $ABCDE$ הבסיס $ABCD$ הוא מקבילית.

נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$,

$C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$.

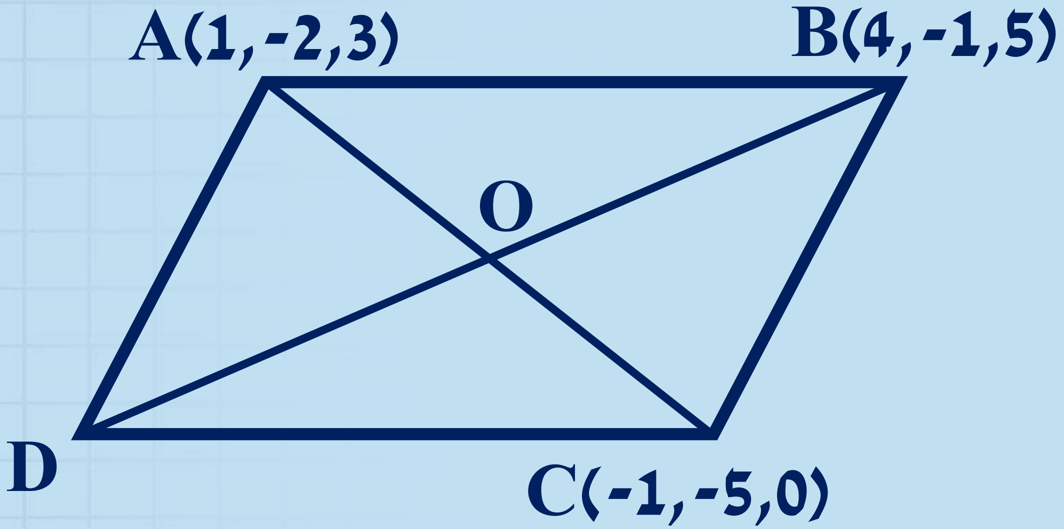
א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

ב. חשב את נפח הפירמידה.



בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

פתרון



נחשב את שיעורי הנקודה D

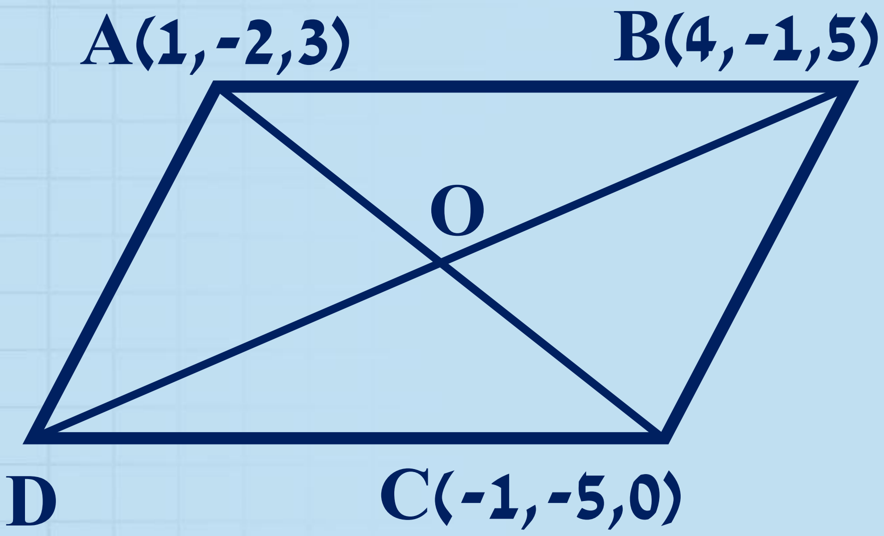
ABCD מקבילית.

במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

נסמן - O נקודת מפגש אלכסונים

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$,
$C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

פתרון



קצוות האלכסון AC: $C(-1,-5,0)$, $A(1,-2,3)$

נחשב את שיעורי נקודה O לפי נוסחת אמצע קטע AC

$$x = \frac{1+(-1)}{2}$$

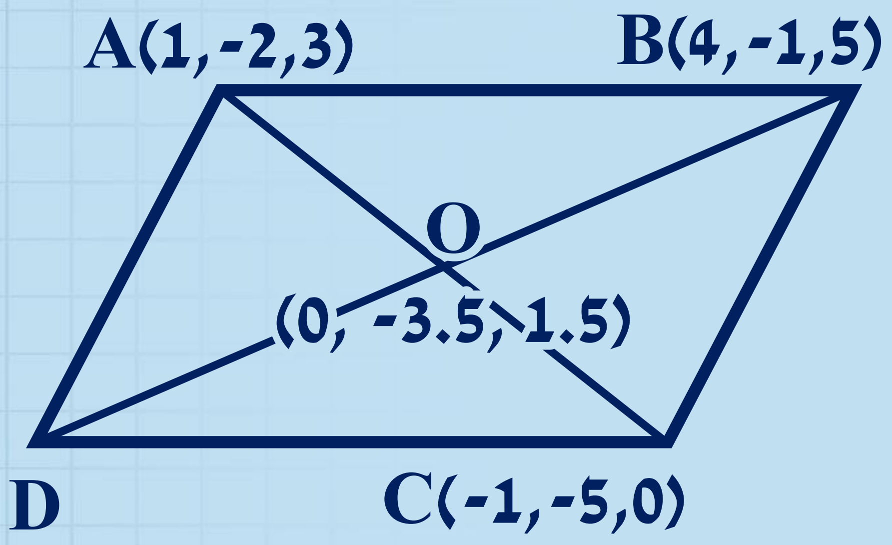
$$y = \frac{-2+(-5)}{2}$$

$$z = \frac{3+0}{2}$$

$O\ (0,-3.5,1.5)$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

פתרון



נקודה $(0,-3.5,1.5)$ O - אמצע אלכסון BD

שיעורי נקודה $B(4,-1,5)$.

נחשב את שיעורי נקודה D לפי נוסחת אמצע קטע.

$$D\,(-4,-6,-2)$$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

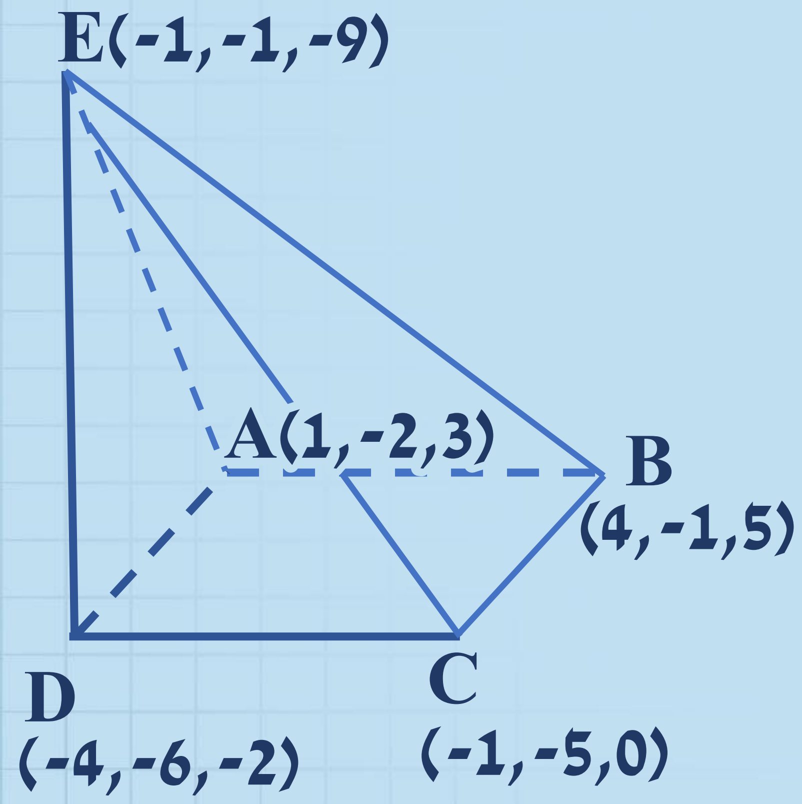
פתרון

כדי להוכיח ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$ נראה, שמכפלה סקלרית של שני ווקטורים שווה ל-0

נגדיר את הווקטורים $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$

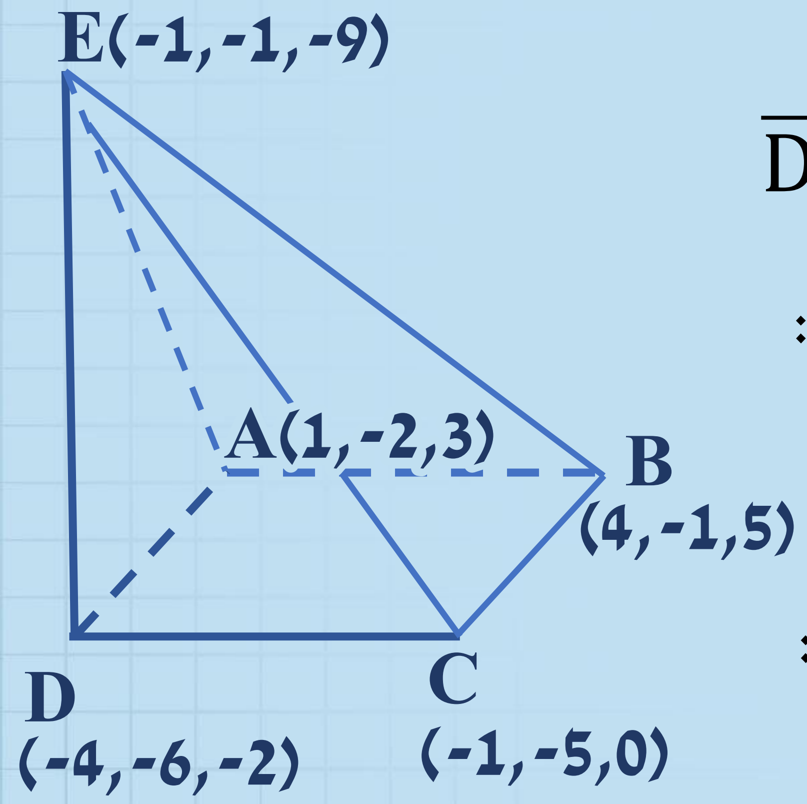
ונחשב את המכפלה הסקלרית של ווקטורים לפי הנוסחה:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$



בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

פתרון



הווקטור המוגדר ע"י שתי הנקודות D ו- E הוא:

$$\overrightarrow{DE} = (-1+4\,,\,-1+6\,,\,-9+2) = (3\,,\,5\,,\,-7)$$

הווקטור המוגדר ע"י שתי הנקודות D ו- A הוא:

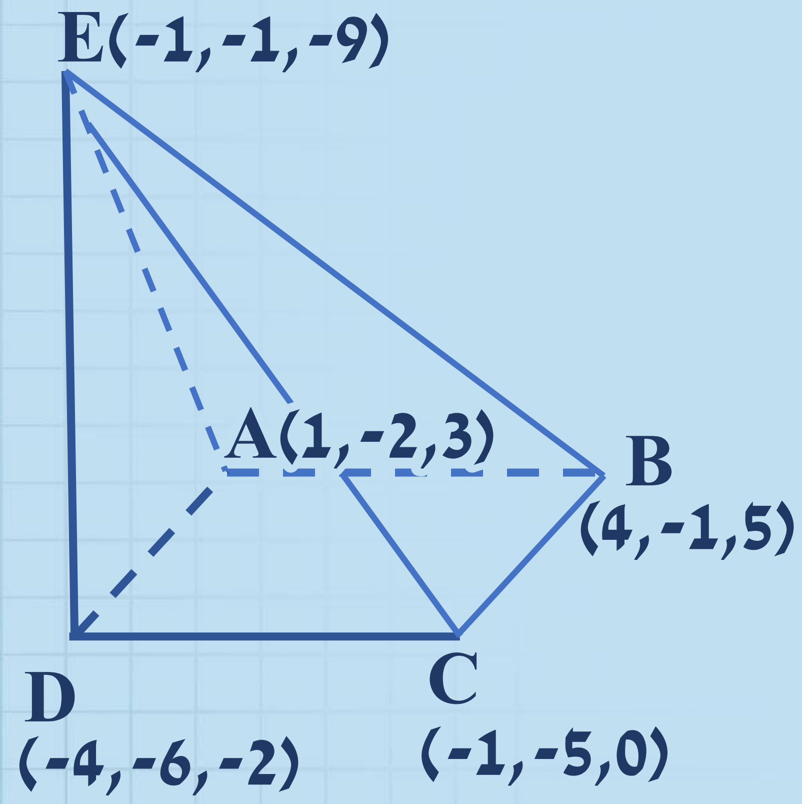
$$\overrightarrow{DA} = (1+4\,,\,-2+6\,,\,3+2) = (5\,,\,4\,,\,5)$$

הווקטור המוגדר ע"י שתי הנקודות D ו- C הוא:

$$\overrightarrow{DC} = (-1+4\,,\,-5+6\,,\,0+2) = (3\,,\,1\,,\,2)$$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. א. הראה ש- $\overrightarrow{DE}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AD}$ וגם ל- $\overrightarrow{CD}$.

פתרון



$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA} = (3\,,5\,,\,-7)\cdot(5\,,4\,,5)$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA} = 15+20-35=0 \Rightarrow \overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AD}$$

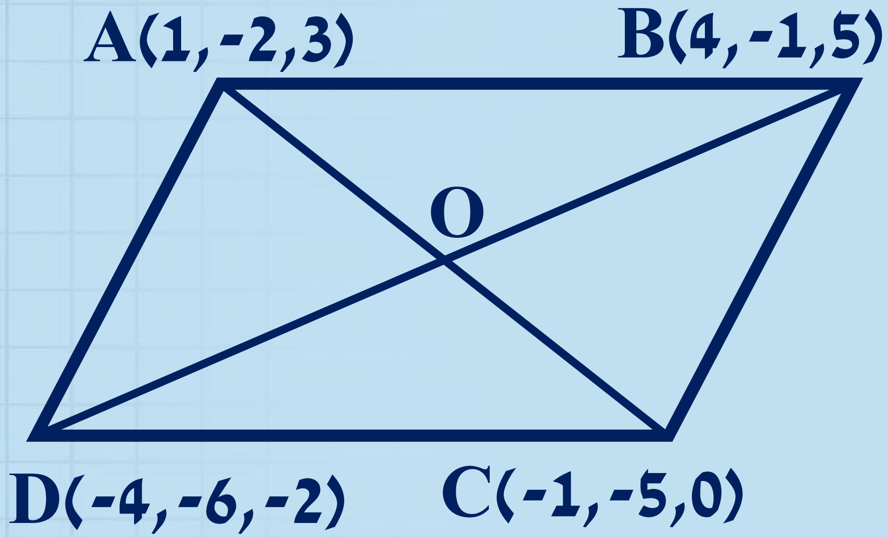
$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC} = (3\,,5\,,\,-7)\cdot(3\,,1\,,2)$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC} = 9+5-14=0 \Rightarrow \overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{CD}$$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון



כדי לחשב את נפח הפירמידה, צריך לחשב את שטח הבסיס ואת אורך הגובה לבסיס.

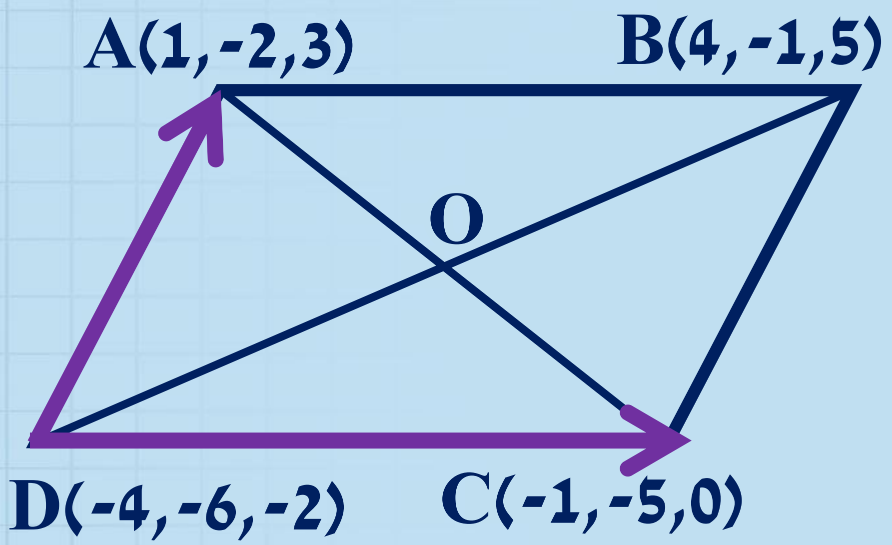
נוסחת שטח המקבילית: $\boxed{S = a \cdot b \cdot \sin\alpha}$

נחשב את אורך הצלעות DC ו- DA כאורך של ווקטורים

$\overrightarrow{DC}$ ו- $\overrightarrow{DA}$, היוצאים מקדקוד D

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון



נוסחה לחישוב אורך של ווקטור:

$$\boxed{|\underline{x}| = \sqrt{(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}}$$

$$\overrightarrow{DA} = (5, 4, 5)$$

$$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{66}$$

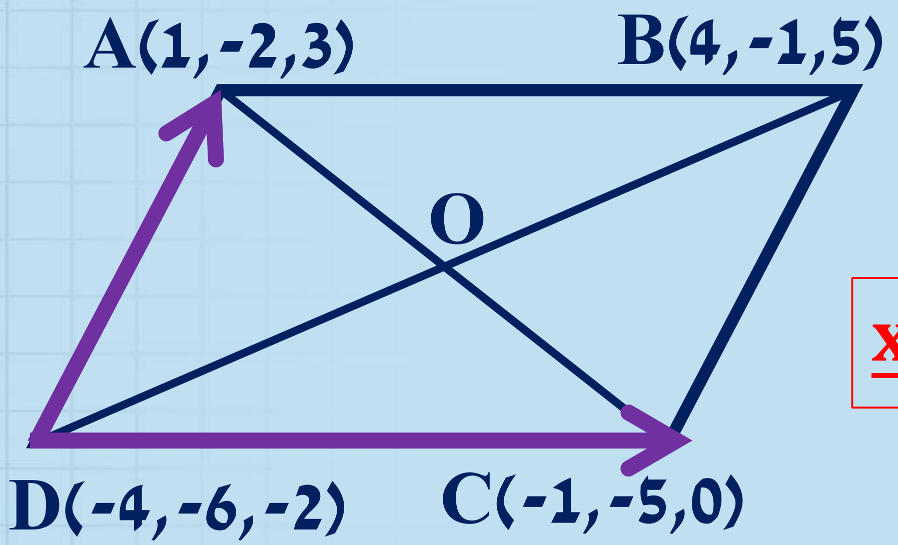
$$\overrightarrow{DC} = (3, 1, 2)$$

$$|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון



למציאת גודל הזווית ADC

נשתמש בנוסחה של מכפלה סקלרית:

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cdot \cos\alpha}$$

$$\overrightarrow{DA} = (5,4,5) \qquad \overrightarrow{DC} = (3,1,2)$$

חישוב של מכפלה סקלרית:

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 29$$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$,
$C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון

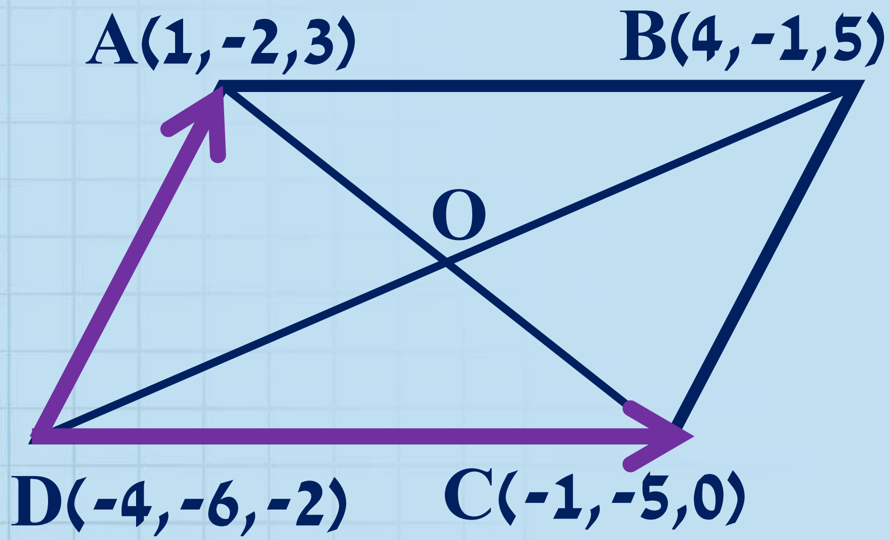
$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 29 \quad , \left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{66} \quad , \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{14}$$

לפי הנוסחה של מכפלה סקלרית:

$$\cos\alpha = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{|\underline{x}| \cdot |\underline{y}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{29}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\alpha \approx 17.44^\circ$$

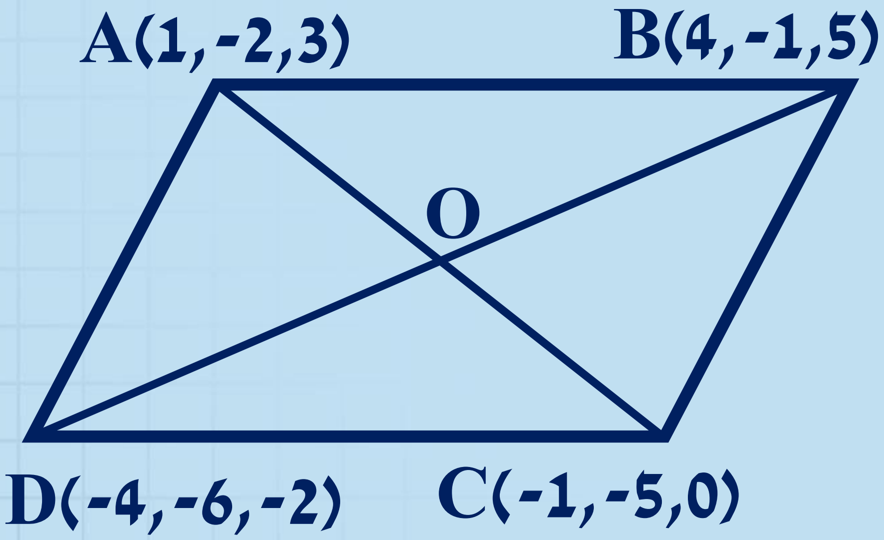


בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון

קיבלנו ש- $|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{66}$, $\measuredangle ADC \approx 17.44°$



$$S_{ABCD} = DA \cdot DC \cdot \sin \measuredangle ADC$$

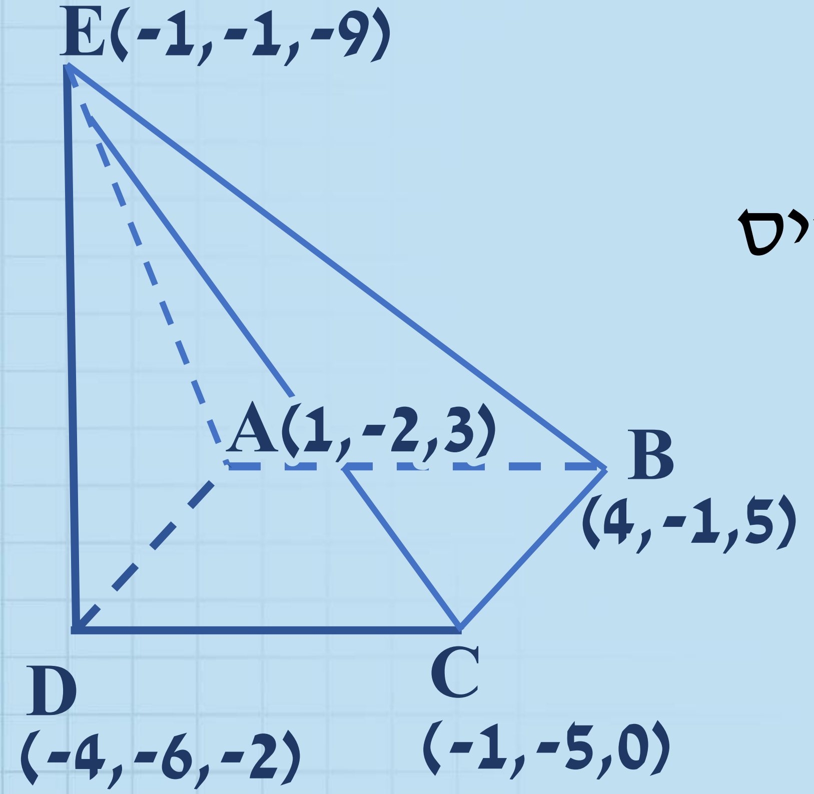
$$S_{ABCD} = \sqrt{66} \cdot \sqrt{14} \cdot \sin 17.44°$$

$$S_{ABCD} = 9.11$$ יחידות שטח

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$. ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון

ישר מאונך למישור אם ורק אם הוא מאונך לשני ישרים שונים המוכלים במישור



הוכחנו ש- $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AD}$ $\quad$ $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{CD}$

לכן DE- גובה לבסיס, כי הוא מאונך לשני ישרים בבסיס

אורך הגובה DE שווה לאורך הווקטור

$$\overrightarrow{DE} = (3\,,5\,,\,-7)$$

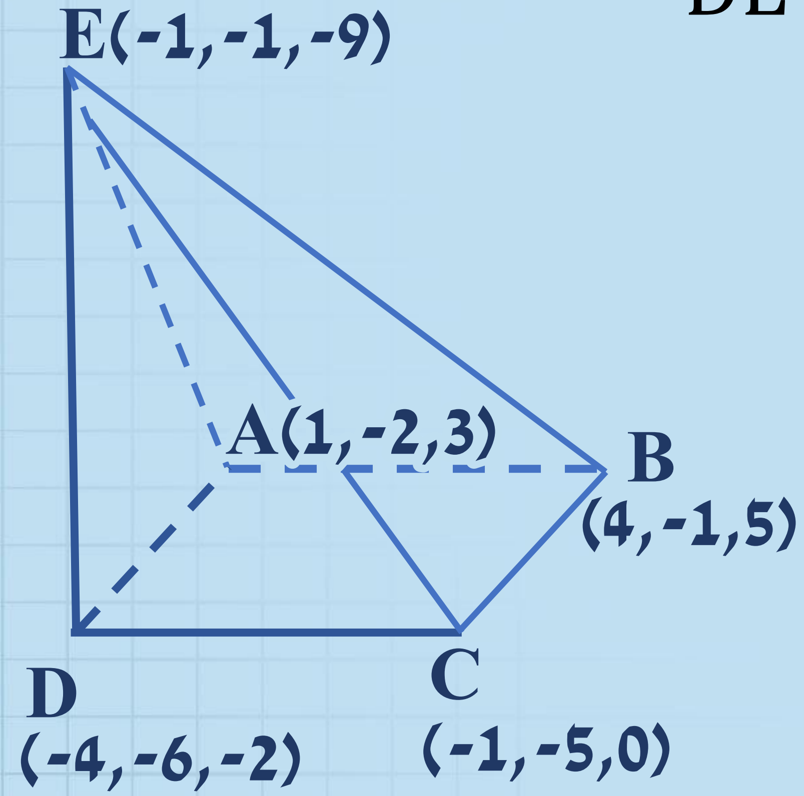
$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{3^2+5^2+(-7)^2} = \sqrt{83}$$

בפירמידה ABCDE הבסיס ABCD הוא מקבילית. נתון: $A(1,-2,3)$, $B(4,-1,5)$, $C(-1,-5,0)$, $E(-1,-1,-9)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה.

פתרון

קיבלנו ש- $S_{ABCD} = 9.11$, הגובה לבסיס $DE = \sqrt{83}$



נחשב את נפח הפירמידה עפ"י הנוסחה:

$$V = \frac{S_{ABCD} \cdot DE}{3}$$

$$V = \frac{9.11 \cdot \sqrt{83}}{3} \longrightarrow V = 27.67 \text{ יחידות נפח}$$

בהצלחה