פתרון תרגיל
מכפלה סקלרית

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–1

582 , עמ' 445, ת. 36

המצגת נערכה ע״י טל מדר

השאלה

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

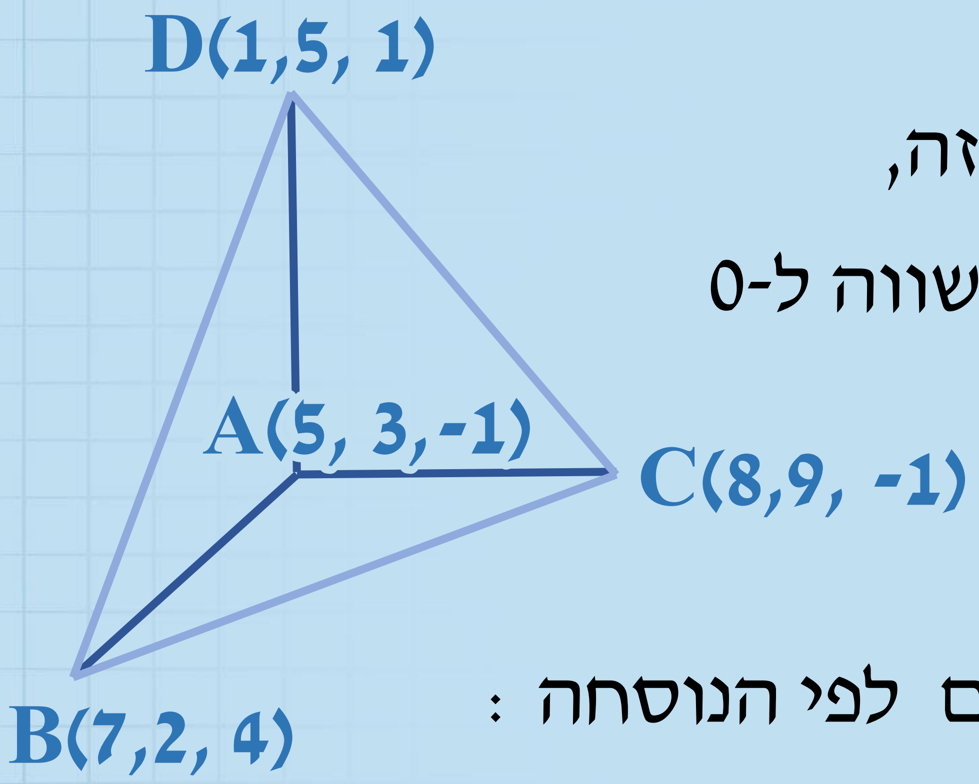
א. הוכח שהמקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה.

ב. חשב את נפח הטטראדר.

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

א. הוכח שהמקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה.

פתרון



כדי להוכיח ש- AD , AC , AB ניצבים זה לזה,

נראה, שמכפלה סקלרית של כל שני ווקטורים שווה ל-0

נגדיר את הווקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

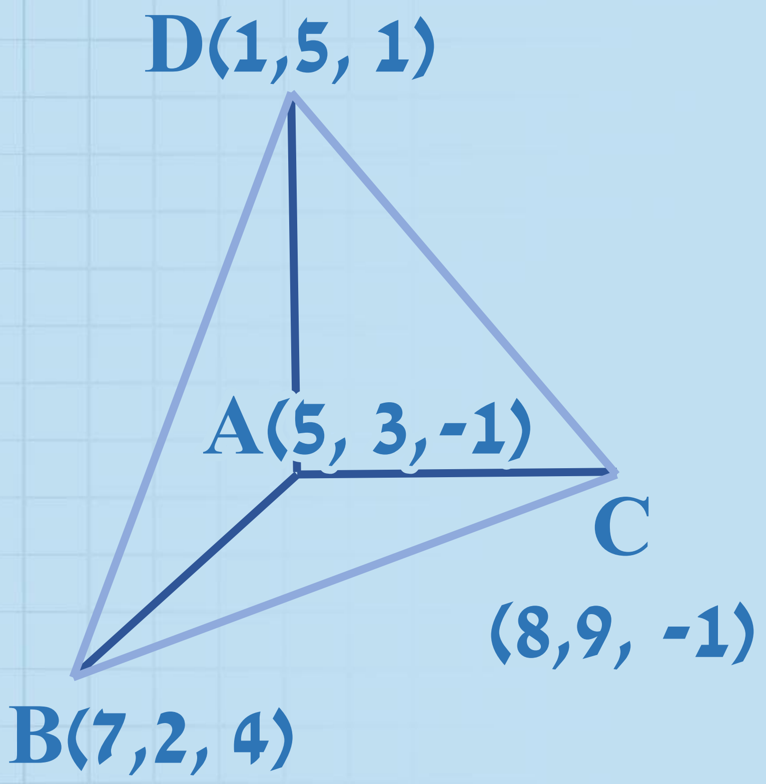
ונחשב את המכפלה הסקלרית של ווקטורים לפי הנוסחה:

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}$$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

א. הוכח שהמקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה.

פתרון



הווקטור המוגדר ע"י שתי הנקודות A ו- B הוא:

$$\overrightarrow{AB} = (7-5\,,\,2-3\,,\,4-(-1)) = (2\,,\,-1\,,\,5)$$

הווקטור המוגדר ע"י שתי הנקודות A ו- D הוא:

$$\overrightarrow{AD} = (1-5\,,\,5-3\,,\,1-(-1)) = (-4\,,\,2\,,\,2)$$

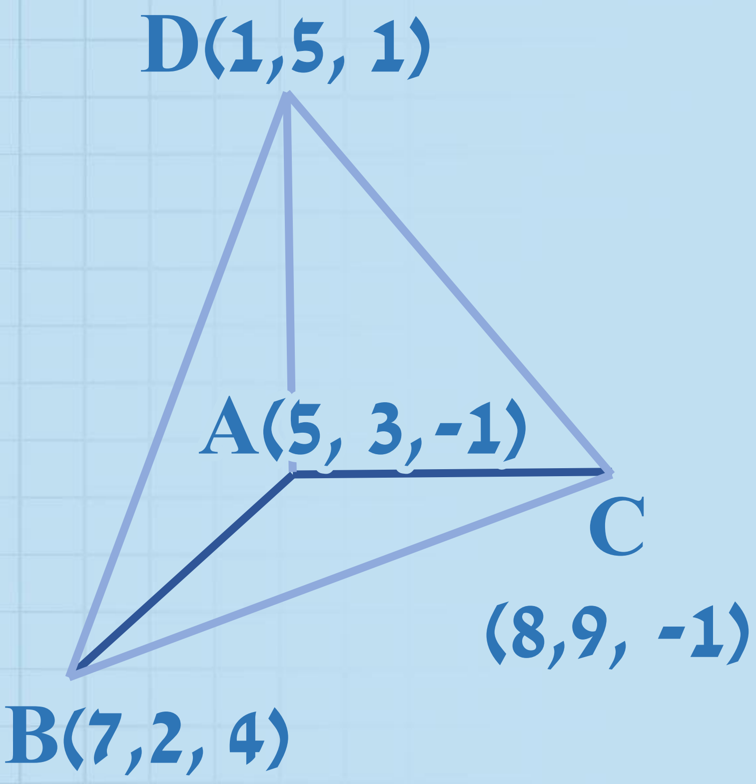
הווקטור המוגדר ע"י שתי הנקודות A ו- C הוא:

$$\overrightarrow{AC} = (8-5\,,\,9-3\,,\,(-1)-(-1)) = (3\,,\,6\,,\,0)$$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

א. הוכח שהמקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה.

פתרון



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (2\,,\,-1\,,5)\cdot(3\,,6\,,0)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6-6+0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Downarrow$$

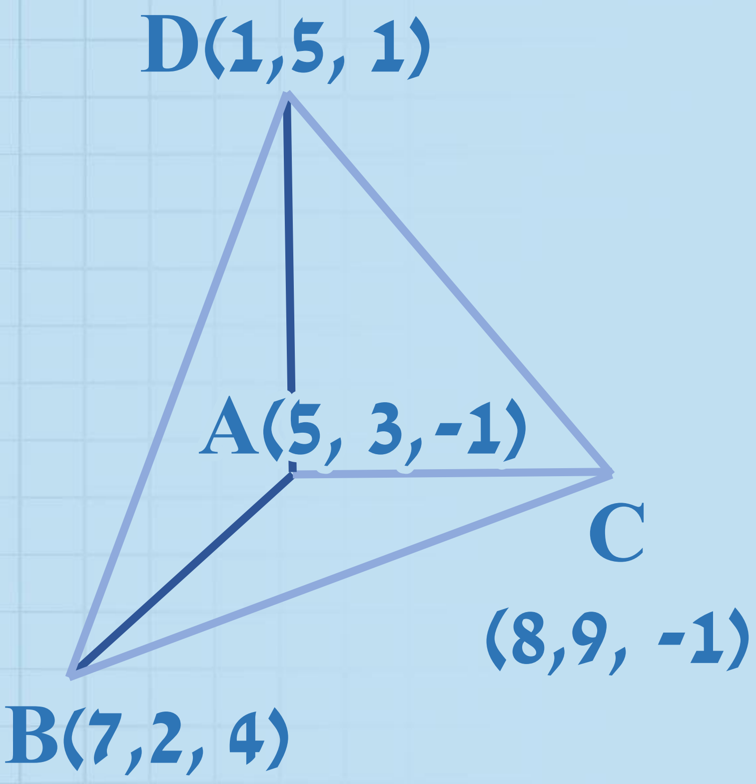
$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$$

המקצעות AB ו- AC ניצבים

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

א. הוכח שהמקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה.

פתרון



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (2\,,\,-1\,,5)\cdot(-4\,,2\,,2)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = -8-2+10$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$$

$$\Downarrow$$

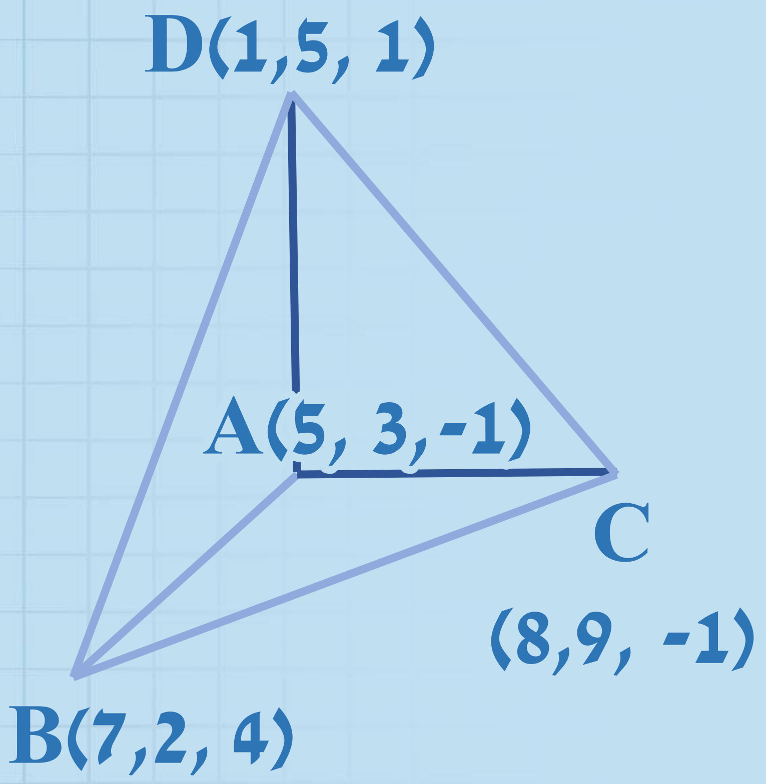
$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$$

המקצעות AB ו- AD ניצבים

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

א. הוכח שהמקצועות AB, AC ו-AD ניצבים זה לזה.

פתרון



$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = (3\,,6\,,0)\cdot(-4\,,2\,,2)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = -12+12+0=0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$$

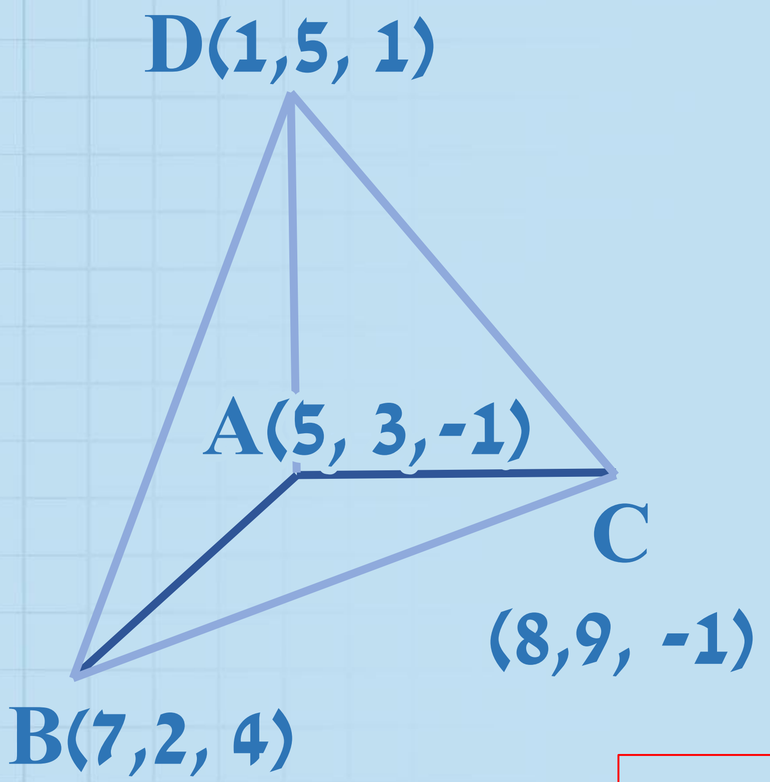
$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$$

המקצועות AD ו- AC ניצבים

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.
ב. חשב את נפח הטטראדר.

פתרון



כדי לחשב את נפח הטטראדר , צריך לחשב את שטח הבסיס ואת אורך הגובה לבסיס.

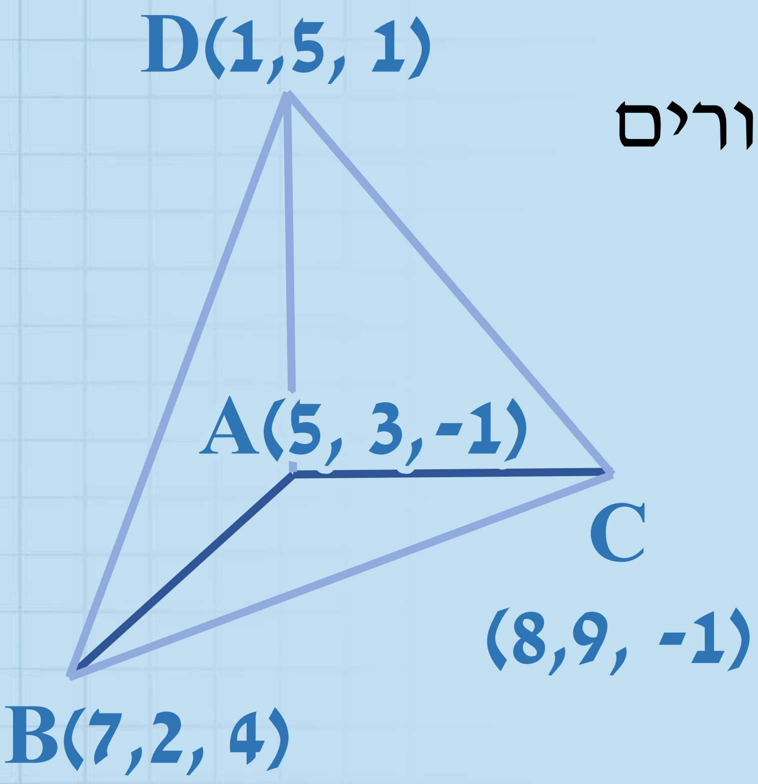
הוכחנו ש- $AB \perp AC$

לכן בבסיס הטטראדר המשולש ABC ישר זווית

נחשב את שטח המשולש עפ"י הנוסחה $\boxed{S = \frac{AB \cdot AC}{2}}$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.
ב. חשב את נפח הטטראדר.

פתרון



אורכי המקצועות AB ו- AC שווים לאורכי הווקטורים

הנוסחה לחישוב אורך ווקטור:

$$\boxed{|\underline{x}| = \sqrt{(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}}$$

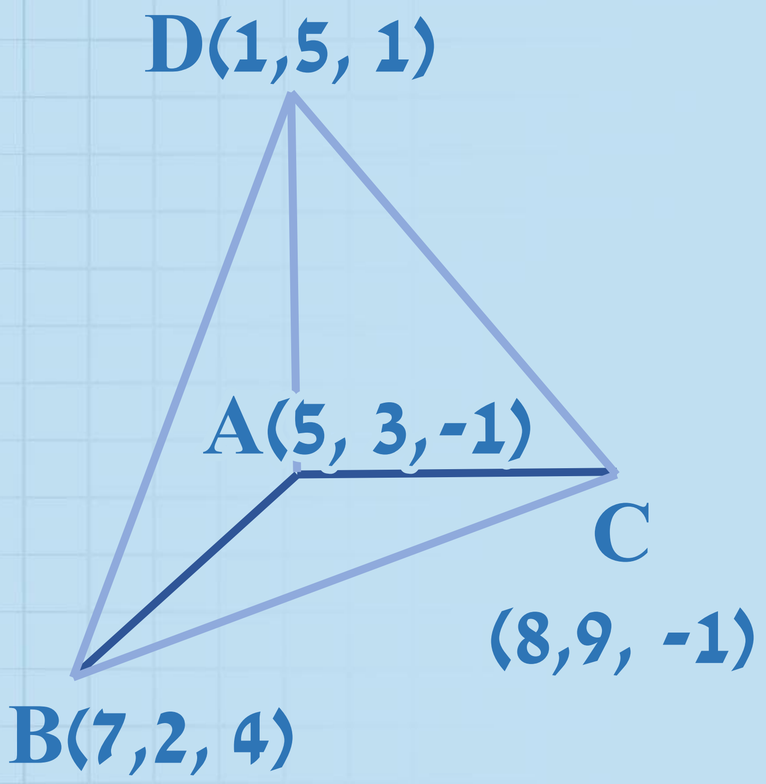
$$\overrightarrow{AB} = (2\ ,\ -1\ ,5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{30}$$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.
ב. חשב את נפח הטטראדר.

פתרון



$$\overrightarrow{AC} = (3\,,6\,,0)$$

עפ״י הנוסחה:

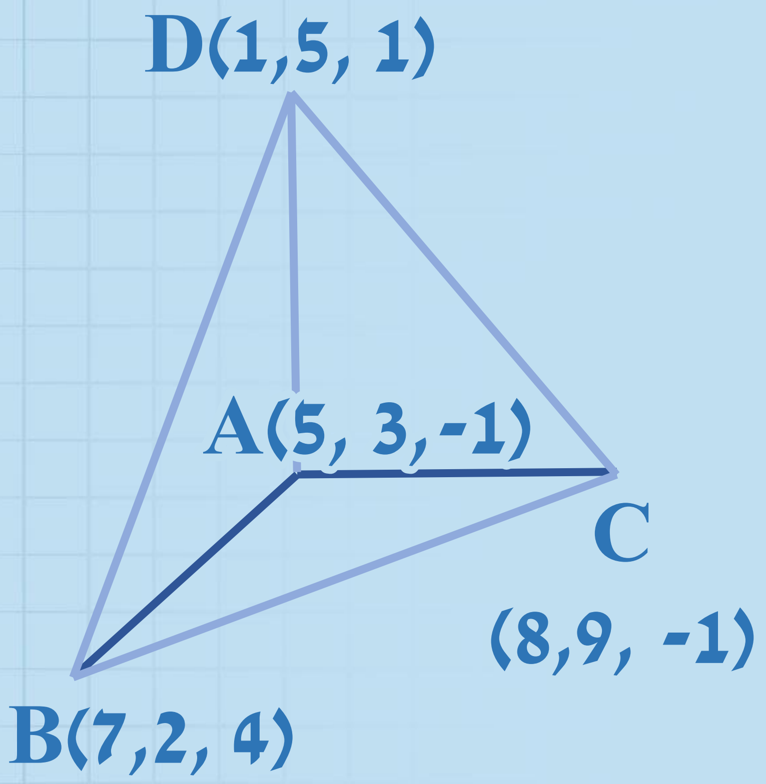
$$\boxed{|\underline{x}| = \sqrt{(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 0^2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{45}$$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.
ב. חשב את נפח הטטראדר.

פתרון



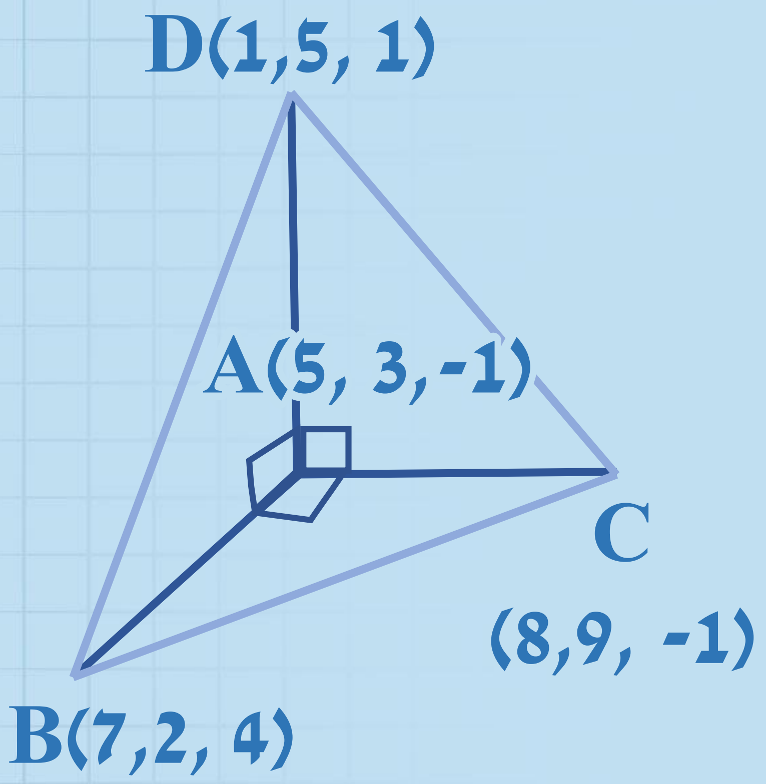
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{45} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{30}$$

$$S_{\Delta\,ABC} = \frac{\sqrt{30}\cdot\sqrt{45}}{2}$$

$$S_{\Delta\,ABC} = \frac{15\cdot\sqrt{6}}{2}$$ יחידות שטח

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.
ב. חשב את נפח הטטראדר.

פתרון



הוכחנו ש- $AD\perp AC$, $AD\perp AB$

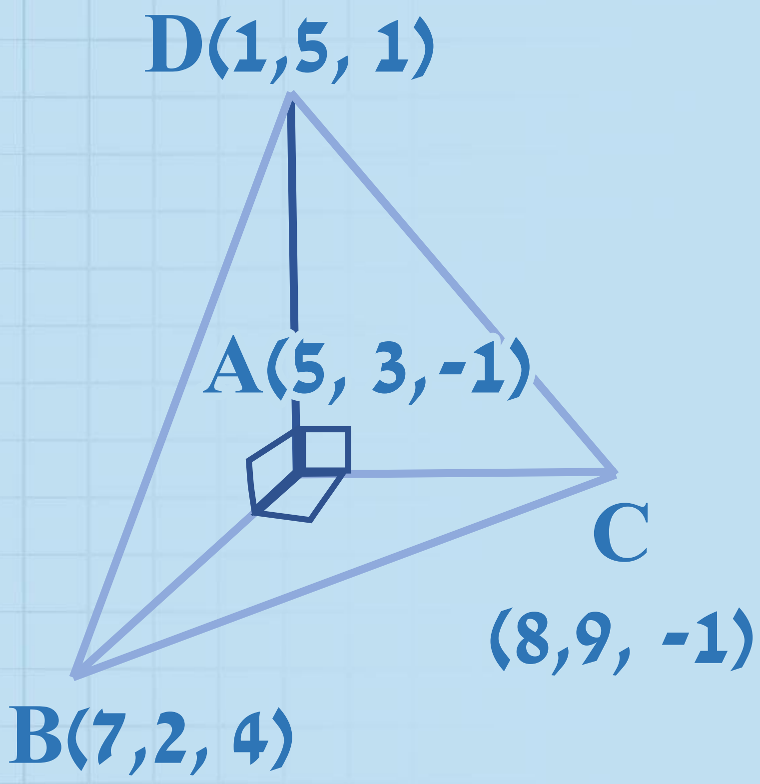
ישר מאונך למישור אם ורק אם הוא מאונך לשני ישרים שונים שמוכלים במישור

לכן AD- גובה לבסיס, כי הוא מאונך לשני ישרים בבסיס ABC

אורך המקצוע AD שווה לאורך הווקטור: $|\overrightarrow{AD}|$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.
ב. חשב את נפח הטטראדר.

פתרון



$$\overrightarrow{AD} = (-4\,,2\,,2)$$

עפ"י הנוסחה:

$$\boxed{|\underline{x}| = \sqrt{(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}}$$

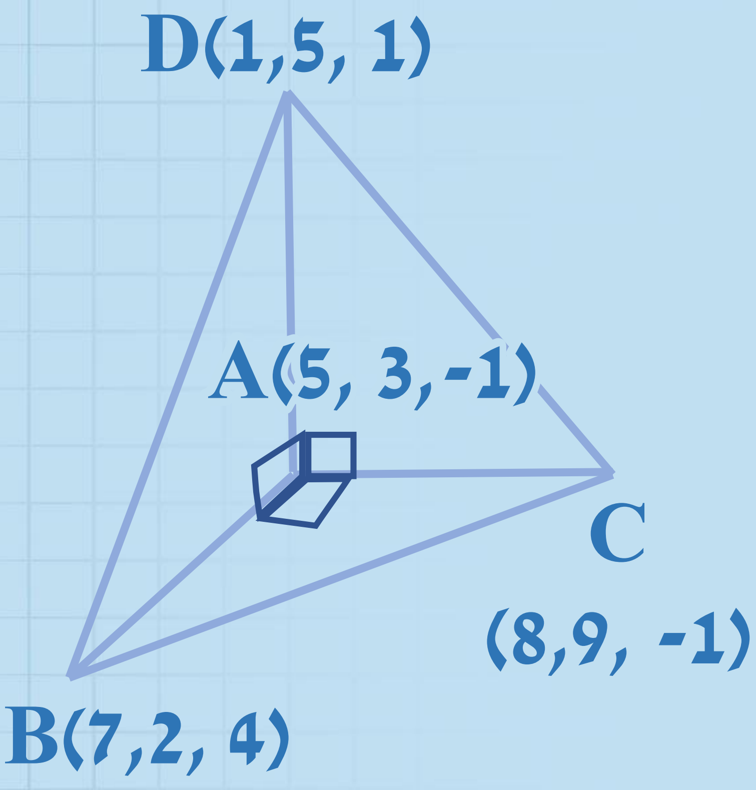
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{24}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{6}$$

36) קודקודיו של טטראדר ABCD הם: $A(5,3,-1)$, $B(7,2,4)$, $C(8,9,-1)$ ו-$D(1,5,1)$.

ב. חשב את נפח הטטראדר.



פתרון

קבלנו ש- $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 2\sqrt{6}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{15\cdot\sqrt{6}}{2}$

נחשב את נפח הטטראדר עפ״י נוסחה:

$$\boxed{V = \frac{S_{\Delta ABC}\cdot AD}{3}}$$

$$V = \frac{\frac{15\cdot\sqrt{6}}{2}\cdot 2\sqrt{6}}{3}$$

$V = 30$ יחידות נפח

בהצלחה