הקנייה

חזקות עם מעריך רציונלי (שבר)

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 24–28

הקנייה

הגדרת המעריך הרציונלי, הקשר בין מעריך רציונלי לחזקה

עד כה מעריך החזקה היה מספר שלם. בסעיף זה נגדיר מהי חזקה עם **מעריך רציונאלי** (שבר) ונראה את הקשר שלו **לשורשים**.

הגדרה (מעריך רציונאלי):

מספר חיובי בחזקת $\frac{n}{m}$ (n שלם, m טבעי) שווה לשורש ה-m של המספר בחזקת n.

בנוסחה:

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}} \qquad (a > 0)$$

הקנייה

דוגמאות: $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$

הערות:

א) חוקי החזקות נכונים גם למעריכים בצורת שבר.

ב) אם נציב $n = 1$ בנוסחה נקבל $\boxed{a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}}$ וזה נכון לכל $a > 0$ ו-m טבעי.

ג) אפשר לרשום גם $\boxed{a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n}$. צורה זו יותר נוחה לחישובים (ללא מחשבון).

ד) חשוב להדגיש: **הביטוי** $a^{\frac{n}{m}}$ **מוגדר רק עבור** $a > 0$. הסיבה היא שאם $a < 0$ והשבר $\frac{n}{m}$ **לא מצומצם** אז הכתיבה בצורה $a^{\frac{n}{m}}$ **איננה מוגדרת** באופן חד משמעי.

הקנייה

דוגמא א':

חשב: (1) $16^{\frac{3}{4}}$

פתרונות:

נוח לפתור תרגילים כאלה ע"י פירוק הבסיס למספרים ראשוניים ושימוש בחזקות עם מעריכים בצורת שבר.

(1) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

תזכורת: חוקי החזקות נכונים גם למעריכים בצורת שבר.

הקנייה

דוגמא א':

חשב: **(2)** $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

(2) $\frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

הקנייה

דוגמא א':

חשב: (ג) $25^{-\frac{1}{2}}$

(ג) $25^{-\frac{1}{2}}=\left(5^2\right)^{-\frac{1}{2}}=5^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=5^{-1}=\frac{1}{5}$.

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

בהצלחה