תרגיל לדוגמה

פרבולה עם מעגל

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

582 , עמ' 132-134, דוגמה א'

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

השקה בין פרבולה ומעגל

בסעיף זה נדון בבעיות הקשורות למעגל ולפרבולה. נעיר תחילה, שבדומה להשקה שבין שני מעגלים ניתן לדבר גם על השקה בין מעגל לפרבולה. ההגדרה:

מעגל ופרבולה נקראים משיקים זה לזה אם יש להם נקודה משותפת (נקודת השקה) שדרכה עובר משיק המשותף למעגל ולפרבולה.

הערה:

כפי שנראה מייד, למעגל ולפרבולה יכולות להיות גם **שתי** נקודות השקה.

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

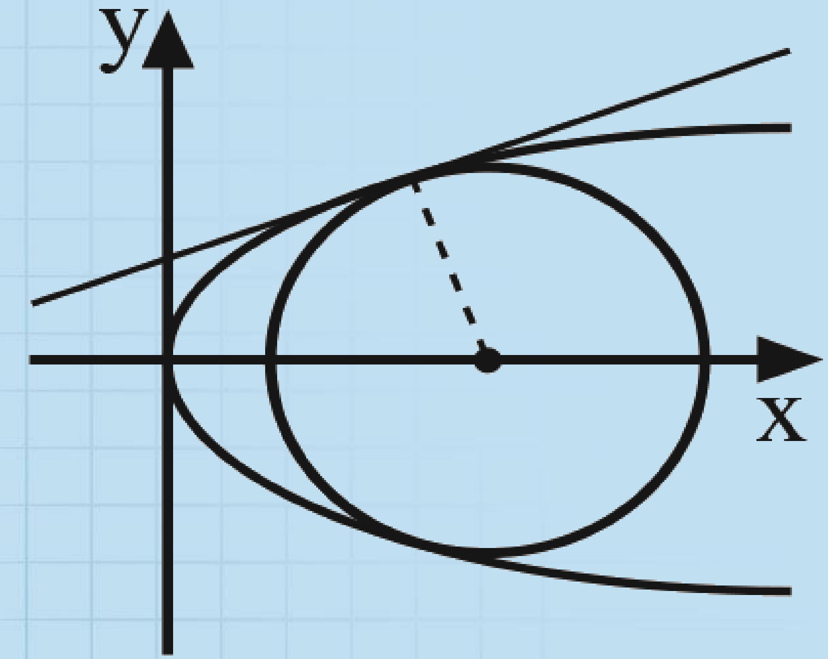
א. מעגל שמרכזו בנקודה $(6,0)$ משיק לפרבולה $y^2 = 8x$ **בשתי נקודות.**
מצא את רדיוס המעגל ואת שתי נקודות ההשקה.

ב. מצא את רדיוס המעגל הנ"ל אם נתון שהוא משיק לפרבולה הנ"ל רק **בנקודה אחת.** מצא גם את משוואת המשיק במקרה זה.

תרגיל לדוגמה

פתרון:

א. דרך א' – נסמן ב-(x,y) את אחת מנקודות ההשקה.
לפנינו שתי משוואות: משוואת המעגל $(x-6)^2+y^2=R^2$
ומשוואת הפרבולה $y^2=8x$. אמנם ישנם כאן שלושה
נעלמים x, y ו-R ורק שתי משוואות, אבל מאחר והמעגל
משיק לפרבולה **ומרכזו** על ציר ה-x אז ל-x **יש פתרון
יחיד**.



תרגיל לדוגמה

$x^2-12x+36+y^2-R^2=0$.

$x^2-12x+36+8x-R^2=0$,

$x^2-4x+36-R^2=0$.

זאת משוואה ריבועית וכדי שיהיה לה **פתרון יחיד** צריך להתקיים

$\Delta=b^2-4ac=0$.

תרגיל לדוגמה

$$\Delta = 16-4(36-R^2) = 0,$$

$$16-144+4R^2 = 0,$$

$$4R^2 = 128$$

$$R^2 = 32.$$

$$R = \sqrt{32}.$$

תרגיל לדוגמה

מהמשוואה כי $\Delta = 0$. נקבל: $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$.

$y = \pm 4$.

נקודות ההשקה הן: $(2, 4)$, $(2, -4)$.

תרגיל לדוגמה

דרך ב' – נסמן נקודת השקה ב-(x_1, y_1). משוואת המשיק למעגל היא $(x-6)(x_1-6)+yy_1 = R^2$ או גם $x(x_1-6)+yy_1-6(x_1-6)-R^2 = 0$. משוואת המשיק לפרבולה היא $yy_1 = 4(x+x_1)$ או גם $-4x+yy_1-4x_1 = 0$. המשוואות מתארות את אותו ישר, לכן קיימת **פרופורציה בין כל המקדמים**, כלומר $\frac{x_1-6}{-4} = \frac{y_1}{y_1} = \frac{-6(x_1-6)-R^2}{-4x_1}$.

מפתרון המשוואות מקבלים $x_1 = 2$ ו-$R^2 = 32$. את y_1 אפשר למצוא ע"י הצבה במשוואת הפרבולה (או המעגל) ומקבלים $y_1 = \pm 4$.

תרגיל לדוגמה

דרך ג' – היות שלמעגל ולפרבולה יש משיק משותף בנקודה (x_1, y_1) הרי שגם **הנורמל** שלהם בנקודה הנ"ל משותף. **הנורמל** המשותף עובר דרך הנקודה $(6, 0)$ כי היא **מרכז המעגל**. שיפוע הנורמל למעגל הוא $\frac{y_1-0}{x_1-6}$. שיפוע הנורמל לפרבולה הוא $-\frac{y_1}{4}$ ולכן נקבל את המשוואה $-\frac{y_1}{4} = \frac{y_1}{x_1-6}$. ממשוואה זו מקבלים $x_1 = 2$ ואז ניתן למצוא בעזרת משוואות המעגל והפרבולה את y_1 ואת R.

תרגיל לדוגמה

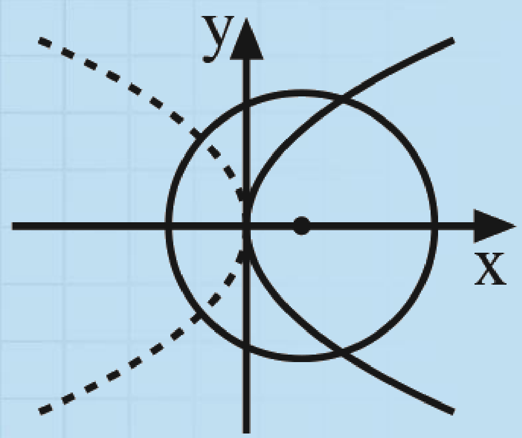
ב. מצא את רדיוס המעגל הנ"ל אם נתון שהוא משיק לפרבולה הנ"ל רק **בנקודה אחת**. מצא גם את משוואת המשיק במקרה זה.

ב. אם מעגל שמרכזו בנקודה $(6,0)$ משיק **בנקודה אחת** לפרבולה $y^2 = 8x$ אז נקודת ההשקה היא **קודקוד** הפרבולה, כלומר **ראשית הצירים**. במקרה כזה רדיוס המעגל הוא 6 ולכן משוואת המעגל היא $(x-6)^2+y^2 = 36$. המשיק המשותף למעגל ולפרבולה במקרה זה הוא ציר ה-y, כלומר הישר $x = 0$.

תרגיל לדוגמה

הערות:

א) כפי שראינו עפ"י הפתרון בדרך א' של סעיף א', כאשר מעגל שמרכזו על החלק החיובי של ציר ה-x משיק לפרבולה בשתי נקודות אז **במשוואה עם** x, שמתקבלת מהמשוואות של המעגל והפרבולה, ה-$0 = \Delta$ (ראה הערה ב'). אם המעגל חותך את הפרבולה בשתי נקודות, כמתואר בציור, אז אמנם גם כאן יש רק פתרון אחד ל-x אבל בפתרון מערכת המשוואות ה-$0 \neq \Delta$. הסיבה היא שמקבלים פתרון נוסף עבור החיתוך של המעגל עם הפרבולה מהצורה $y^2 = -2px$.



תרגיל לדוגמה

ב) נסביר עכשיו מדוע, כאשר בפתרון מערכת המשוואות של המעגל והפרבולה כשמקבלים $0 = \Delta$, אז הפרבולה והמעגל **משיקים** זה לזה ולהיפך.

משוואת המעגל היא $(x-a)^2+y^2 = R^2$ ומשוואת הפרבולה היא $y^2 = 2px$. ($a > 0$, $p > 0$, $a > p$).

בהצלחה