הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'-1

582 , עמ' 33-35

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

המצב ההדדי של שני ישרים

יהיו נתונים שני ישרים בעלי משוואות כלליות $A_1x+B_1y+C_1=0$ ו-$A_2x+B_2y+C_2=0$. מבחינה גרפית קיימות שלוש אפשרויות לגבי **המצב ההדדי** של שני הישרים והן שהישרים:

א) נחתכים בנקודה אחת. **ב)** מקבילים זה לזה. **ג)** מתלכדים לישר אחד.

הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

נבדוק תחילה את המקרה ששני הישרים **מאונכים לציר ה-x.** במקרה כזה

$B_1 = B_2 = 0$. משוואות הישרים מקבלות את הצורה $A_1x+C_1 = 0$ ו-$A_2x+C_2 = 0$

או $x = -\frac{C_1}{A_1}$ ו-$x = -\frac{C_2}{A_2}$. אם נסמן $a_1 = -\frac{C_1}{A_1}$ ו-$a_2 = -\frac{C_2}{A_2}$ אז המשוואות

הן $x = a_1$ ו-$x = a_2$.

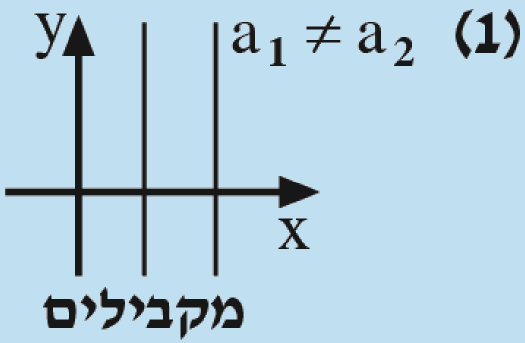
הקנייה

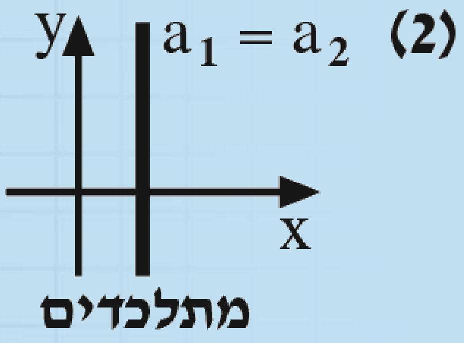
חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

עכשיו נבחין בין שני המקרים הבאים:

(1) אם $a_1 \neq a_2$ אז הישרים מקבילים זה לזה.

(2) אם $a_1 = a_2$ אז הישרים מתלכדים לישר אחד.





הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

נניח עכשיו ששני הישרים **אינם מאונכים לציר ה-x**. במקרה כזה ניתן לכתוב

אותם בצורה המפורשת: $y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1}$ ו- $y=-\frac{A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2}$. אם נסמן $m_1=-\frac{A_1}{B_1}$,

$b_1=-\frac{C_1}{B_1}$, $m_2=-\frac{A_2}{B_2}$, $b_2=-\frac{C_2}{B_2}$ אז המשוואות הן: $y=m_1x+b_1$ ו- $y=m_2x+b_2$.

כפי שכבר ראינו, $m_1=\mathrm{tg}\,\alpha_1$ ו- $m_2=\mathrm{tg}\,\alpha_2$ כאשר α_1 ו- α_2 הן הזויות בהתאמה

שהישרים יוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

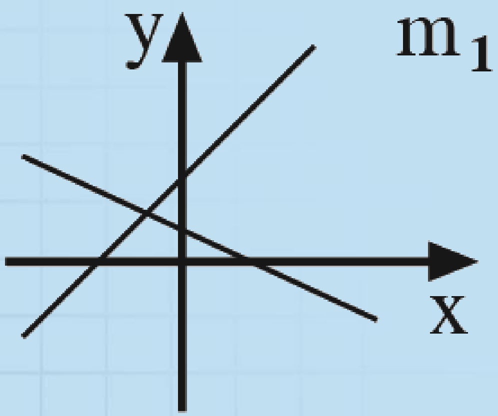
הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

עכשיו נבחין בין **שלושת המקרים הבאים:**

(1) אם $m_1 \neq m_2$ ברור שגם $\alpha_1 \neq \alpha_2$ לכן הישרים אינם מקבילים והם נחתכים בנקודה אחת. (ראה ציור ימני למטה).

(1) $m_1 \neq m_2$

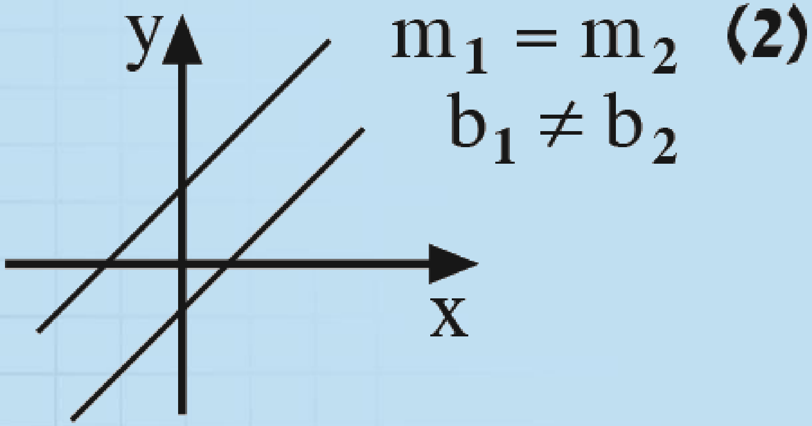


נחתכים

הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

(2) אם $m_1 = m_2$ הרי שגם $\alpha_1 = \alpha_2$ ולכן הישרים מקבילים או אולי מתלכדים.
אם בנוסף $b_1 \neq b_2$ אז הישרים מקבילים. (ראה ציור אמצעי).

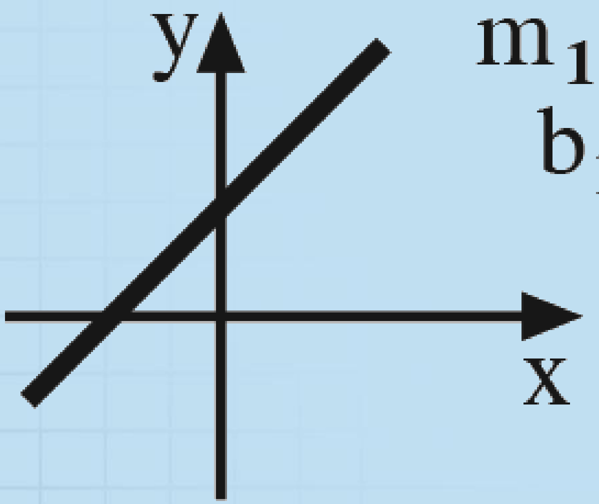


מקבילים

הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

(3) אם $m_1 = m_2$ וגם $b_1 = b_2$ אז הישרים מתלכדים לישר אחד. (ראה ציור שמאלי).



(3) $m_1 = m_2$

$b_1 = b_2$

מתלכדים

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

בהסתמך על כללי הפרופורציה נוכל לרשום את התוצאות הנ"ל בעזרת המקדמים
A, B ו-C השונים מאפס באופן הבא: (אם יש מקדמים השווים **לאפס** נעזרים **במכפלות**
המתאימות מהצורה: $A_1 \cdot B_2$, $A_2 \cdot B_1$, $A_1 \cdot C_2$, $A_2 \cdot C_1$, $B_1 \cdot C_2$, $B_2 \cdot C_1$).

א) אם $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{A_1}{A_2}$ **אז הישרים נחתכים בנקודה אחת ולהיפך.**

ב) אם $\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{B_1}{B_2} = \frac{A_1}{A_2}$ **אז הישרים מקבילים ולהיפך.**

ג) אם $\frac{C_1}{C_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{A_1}{A_2}$ **אז הישרים מתלכדים ולהיפך.**

הקנייה

חיתוך, הקבלה והתלכדות של ישרים

קיימת כמובן גם **משמעות אלגברית**. נסתכל במערכת של שתי המשוואות עם שני הנעלמים:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1 = 0 \\ A_2x+B_2y+C_2 = 0 \end{cases}$$

הקשר בין מספר הפתרונות למצבם ההדדי של הישרים הוא:

א) אם יש פתרון יחיד למערכת – הישרים נחתכים בנקודה אחת.
ב) אם אין פתרון למערכת – הישרים מקבילים זה לזה.
ג) אם יש אינסוף פתרונות למערכת – הישרים מתלכדים לישר אחד.

הקנייה

דוגמא א':

מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים:

(1) $\begin{cases} -x+3y+2 = 0 \\ x+2y-12 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x-10y-3 = 0 \\ 2x-5y-4 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-3y+1 = 0 \\ 6x-9y+3 = 0 \end{cases}$

פתרונות:

(1) אם נבדוק פרופורציה בין המקדמים של המשתנים x ו-y נקבל $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{1}$ ולכן יש לישרים נקודת חיתוך יחידה. נקודה זאת מוצאים ע"י פתרון המערכת של שתי המשוואות $-x+3y+2 = 0$ ו-$x+2y-12 = 0$. הפתרון המתקבל הוא $x = 8$ ו-$y = 2$. כלומר הישרים נחתכים בנקודה $(8,2)$.

הקנייה

דוגמא א':

מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים:

(2)
$$\begin{cases} 4x-10y-3=0 \\ 2x-5y-4=0 \end{cases}$$

(2) **דרך א'** – נבדוק פרופורציה בין המקדמים. נקבל $\frac{-3}{-4} \neq \frac{-10}{-5} = \frac{4}{2}$, כלומר מתקיים

$\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{B_1}{B_2} = \frac{A_1}{A_2}$ ולכן הישרים מקבילים.

הקנייה

דוגמא א':

מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים:

(2) $$\begin{cases} 4x-10y-3=0 \\ 2x-5y-4=0 \end{cases}$$

דרך ב' – ננסה לפתור את המערכת של שתי המשוואות. אם נכפול את המשוואה השנייה פי 2 ונחסר אותה מהראשונה נקבל $5=0$ וזה לא ייתכן. כלומר – אין פתרון ולכן הישרים מקבילים.

הקנייה

דוגמא א':

מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים:

(3) $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 6x-9y+3=0 \end{cases}$

(3) **דרך א'** – נבדוק פרופורציה בין המקדמים. נקבל $\frac{1}{3}=\frac{-3}{-9}=\frac{2}{6}$, כלומר מתקיים

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ ולכן הישרים מתלכדים לישר אחד.

הקנייה

דוגמא א׳:

מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} 2x-3y+1=0 & (3) \\ 6x-9y+3=0 \end{cases}$$

דרך ב׳ – ננסה לפתור את המערכת של שתי המשוואות. אם נכפול את המשוואה הראשונה פי 3 ונחסר את המשוואה השנייה מהראשונה נקבל $0=0$ וזה נכון לכל מספר. לכן יש אינסוף פתרונות והישרים מתלכדים לישר אחד.

בהצלחה