הקנייה

סדרה חשבונית – האיבר הכללי

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 90–92

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

הקנייה

אלגברה — סדרה חשבונית

סדרה חשבונית — האיבר הכללי

סדרה כללית

המושג **סדרה** מתייחס באופן כללי לקבוצה של מספרים שבה ישנו איבר **ראשון**, איבר **שני**, איבר **שלישי** וכו׳. בדרך כלל מדברים על סדרה שבה קיימת **חוקיות מסוימת**.

דוגמאות לסדרות (סדר האיברים הוא משמאל לימין):

(1) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ (2) $12, 8, 4, 0, -4, \ldots$

(3) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ (4) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

(שלוש הנקודות שמימין לסדרה מראות על המשכה ועל המשך החוקיות אם היא קיימת).

הקנייה

אלגברה — סדרה חשבונית

סדרה חשבונית — האיבר הכללי

סדרה כללית

דוגמאות לסדרות (סדר האיברים הוא משמאל לימין):

(1) $2, 5, 8, 11, 14, ...$ (2) $12, 8, 4, 0, -4, ...$

(3) $3, 6, 12, 24, 48, ...$ (4) $1, 4, 9, 16, 25, ...$

קל לראות ש**בסדרה** (1) כל איבר (פרט לראשון) גדול מקודמו ב-3. **בסדרה** (2) כל איבר (פרט לראשון) קטן מקודמו ב-4. **בסדרה** (3) כל איבר (פרט לראשון) גדול מקודמו פי 2. **סדרה** (4) היא למעשה הריבועים של המספרים הטבעיים $1, 2, 3, 4, 5, ...$ כלומר הסדרה היא $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ...$. בשלב ראשון נדון בסדרות כמו הסדרות שבדוגמאות (1) ו-(2).

הקנייה

אלגברה — סדרה חשבונית

סדרה חשבונית — האיבר הכללי

סדרה כללית

את האיבר **הראשון** של הסדרה מסמנים ב-a_1, את האיבר **השני** ב-a_2 וכו'. באופן דומה, האיבר **במקום** ה-$n-1$ מסומן ב-a_{n-1} והאיבר **במקום** ה-n מסומן ב-a_n והוא נקרא גם **האיבר הכללי של הסדרה**. (המספרים הטבעיים $1,2,3,\ldots,n$ כאן הם אינדקסים או מציינים). אם **האיבר האחרון** של הסדרה הוא a_n אז יש בסדרה n **איברים**.

הקנייה

אלגברה — סדרה חשבונית

סדרה חשבונית — האיבר הכללי

הגדרה של סדרה

מקובלות שתי דרכים להגדרת סדרה והן:

א) עפ"י הנוסחה לאיבר הכללי שלה (הגדרה לפי מקום) –

הגדרה זו מבוססת על **הנוסחה ל- a_n** שנקראת גם **התבנית לפי מקום של הסדרה.**

אם נתונה הנוסחה ל- a_n ניתן למצוא את איברי הסדרה ע"י **הצבת ערכי n** עבור $n = 1,2,3,...$ **בנוסחה.** (ראה עמ' 168).

הקנייה

אלגברה — סדרה חשבונית

סדרה חשבונית — האיבר הכללי

הגדרה של סדרה

מקובלות שתי דרכים להגדרת סדרה והן:

ב) עפ"י נוסחת נסיגה (רקורסיה) –
בהגדרה זו, בדרך כלל, נתון **האיבר הראשון** (זהו **תנאי ההתחלה**) ונוסחה המראה כיצד **מתקבל כל איבר** (החל מהשני) **מהאיבר הקודם** לו. החל מעמ' 173 נדון בסדרות כאלה המוגדרות בעזרת נוסחת נסיגה.

הקנייה

הגדרת הסדרה החשבונית

נגדיר עכשיו את הסדרה החשבונית.

הגדרת הסדרה החשבונית – סדרת מספרים בעלת איבר ראשון (קבוע) שכל איבר שלה (החל מהאיבר השני) מתקבל מהאיבר הקודם לו ע"י הוספת מספר קבוע נקראת סדרה חשבונית (אריתמטית).

המספר **הקבוע** נקרא **הפרש הסדרה** ומסומן באות d. ההגדרה הנ"ל נקראת **ההגדרה בעזרת נוסחת נסיגה** של הסדרה החשבונית. נניח שהאיבר הראשון הוא a, אם a_n הוא איבר בסדרה חשבונית ו-a_{n+1} הוא האיבר הבא אחריו אז עפ"י ההגדרה מתקיים:

$$\boxed{a_1 = a \quad , a_{n+1} = a_n + d} \qquad (n \text{ טבעי})$$

הקנייה

הגדרת הסדרה החשבונית

הערות:

א) אם הפרש הסדרה החשבונית הוא מספר **חיובי** אז איברי הסדרה הולכים וגדלים והסדרה נקראת **סדרה עולה**. (**דוגמא** (1) בעמ׳ הקודם: $d = 3$).
אם הפרש הסדרה החשבונית הוא מספר **שלילי** אז איברי הסדרה הולכים וקטנים והסדרה נקראת **סדרה יורדת**. (**דוגמא** (2) בעמ׳ הקודם: $d = -4$).
(כאשר הפרש הסדרה שווה לאפס כל איברי הסדרה שווים זה לזה ובדרך כלל לא נעסוק בסדרה כזאת).

הקנייה

הגדרת הסדרה החשבונית

הערות:

ב) **תכונת הסדרה החשבונית – כל איבר בסדרה חשבונית** (פרט לראשון) **הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים הסמוכים לו.** מכאן גם שמה של הסדרה.

(מספר b נקרא ממוצע חשבוני (אריתמטי) של המספרים a ו-c אם מתקיים $b = \frac{a+c}{2}$).

נניח, אם כן ש-a, b, c הם שלושה איברים **סמוכים** בסדרה חשבונית.

אם d הוא הפרש הסדרה אז מתקיים $b-a = d$ וגם $c-b = d$. לכן $b-a = c-b$,

ז"א $\boxed{2b = a+c}$ או $b = \frac{a+c}{2}$. כלומר b הוא הממוצע החשבוני של a ו-c.

הקנייה

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית

מציאת איברי הסדרה עפ"י ההגדרה הרקורסיבית שהבאנו היא לא פשוטה היות וכדי למצוא איבר כלשהו **צריך למצוא** את **כל** האיברים **שלפניו**. נביא עכשיו את **הנוסחה ל-a_n** של סדרה חשבונית, כלומר את **התבנית לפי מקום**. בעזרת נוסחה זו נוכל למצוא בקלות כל איבר של הסדרה עפ"י מקומו.

עפ"י ההגדרה של סדרה חשבונית מתקיים:

$a_2 - a_1 = d\ ,\ a_3 - a_2 = d\ ,\ a_4 - a_3 = d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n - a_{n-1} = d$. אם נחבר לחוד את כל האגפים השמאליים ולחוד את כל האגפים הימניים של $n-1$ השוויונות הנ"ל נקבל:

$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \ldots + a_n - a_{n-1} = d + d + d + \ldots + d$. כלומר $a_n - a_1 = (n-1)d$ (האיברים $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ מתבטלים) ולכן $a_n = a_1 + (n-1)d$.

הקנייה

לסיכום –

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית היא: $\boxed{a_n = a_1+(n-1)d}$

בעזרת הנוסחה אפשר **להגדיר** את הסדרה החשבונית בדרך נוספת:

סדרה חשבונית זאת סדרה שהאיבר הכללי שלה הוא $a_n = a_1+(n-1)d$ כאשר a_1 ו-d הם מספרים קבועים.

הגדרה זאת נקראת ההגדרה **לפי מקום** של הסדרה החשבונית.

בהצלחה