הקנייה

הנוסחה $a^{log_a x} = x$

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 48–49

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

הקנייה

הנוסחה $a^{\log_a x} = x$

נביא עכשיו נוסחה מיוחדת שבמקרים מסויימים מקלה בחישובים.

הנוסחה היא: $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

שים לב: בנוסחה זו בסיס החזקה הוא a וגם בסיס הלוגריתם הוא a.

הקנייה

הנוסחה $a^{\log_a x} = x$

ניתן להוכיח את הנוסחה בשתי דרכים.

דרך א׳ – עפ״י הגדרת הלוגריתם:

אם $\log_a x = b$ אז עפ״י ההגדרה $a^b = x$.

אם נציב במקום b את הביטוי $\log_a x$ השווה לו נקבל:

$a^b = a^{\log_a x} = x$.

הקנייה

הנוסחה $a^{\log_a x} = x$

ניתן להוכיח את הנוסחה בשתי דרכים.

דרך ב׳ – ע״י הוצאת הלוגריתם:

נסמן $a^{\log_a x} = c$ ונוציא לוגריתם לפי בסיס a משני האגפים. נקבל:

$\log_a c = \log_a\left(a^{\log_a x}\right)$, לכן $\log_a c = \log_a x \cdot \log_a a$,

ז״א $\log_a c = \log_a x \cdot 1$, כלומר $\log_a x = \log_a c$ ולכן $x = c$.

הקנייה

דוגמא:

חשב, ללא מחשבון, את ערך הביטוי $8^{\log_2 5}$.

פתרון:

ניעזר בנוסחה $a^{\log_a x} = x$.

דרך א' – נסתמך על הכלל $(a^n)^m = (a^m)^n$ ונקבל:

$$8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$$

דרך ב' – נסתמך על החוק $n\log_a x = \log_a x^n$ ונקבל:

$$8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = 2^{\log_2 5^3} = 2^{\log_2 125} = 125$$

הקנייה

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

חשב: (ללא מחשבון)

9) $$3^{\log_{27} 8} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{27} 8} = 27^{\frac{1}{3}\log_{27} 8}$$

$$= 27^{\log_{27} 8^{\frac{1}{3}}} = 27^{\log_{27} 2} = 2$$

$$3^{\log_{27} 8} = 2$$

בהצלחה