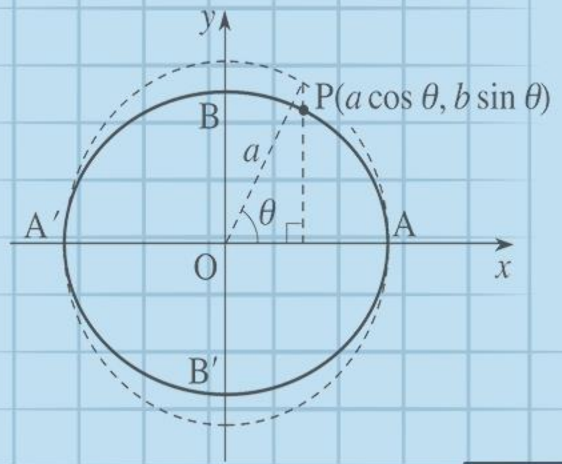
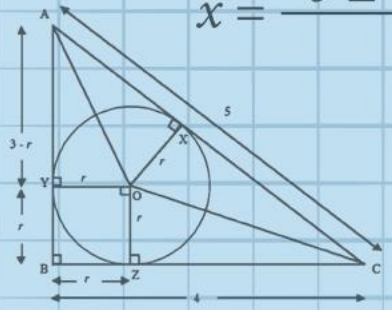
פתרון תרגיל

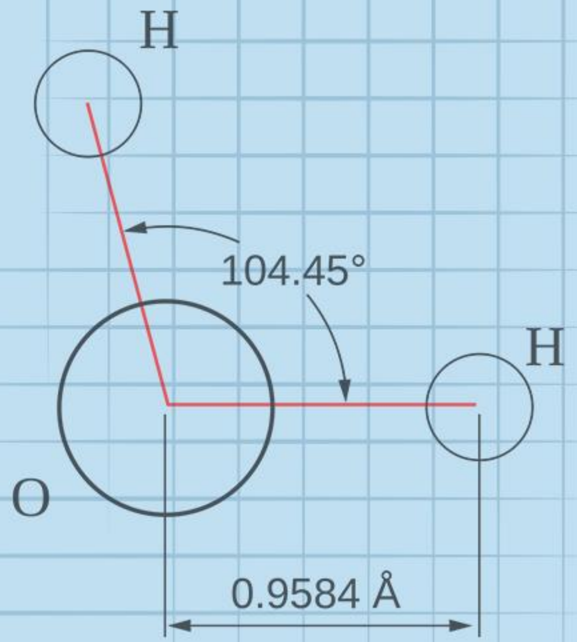
בעיות קיצון –
תרגילים לחזרה

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 234, ת. 28







המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה

28) נתונה הפונקציה $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{x^2}$ בתחום $x > 0$.

א. מצא את הנקודה על גרף הפונקציה בתחום $x > 0$ ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הוא מינימלי. (**הדרכה:** צריך למצוא מינימום לנגזרת של הפונקציה).

ב. מצא את משוואת המשיק בעל השיפוע המינימלי.

ג. מצא את הזוית שהמשיק בעל השיפוע המינימלי יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

א. מצא את הנקודה על גרף הפונקציה בתחום $x > 0$ ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הוא מינימלי. (**הדרכה:** צריך למצוא מינימום לנגזרת של הפונקציה).

פתרון

שיפוע המשיק = ערך הנגזרת בנקודה

$$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{x^2}$$

שיפוע מינימלי = ערך קיצון לפונקציית הנגזרת

נמצא נגזרת שנייה ונשווה אותה ל-0.

$$y' = g(x) = 3x - \frac{0 \cdot x^2 - 8 \cdot 2x}{x^4}$$

$$y' = g(x) = 3x + \frac{16}{x^3}$$

$$y'' = g'(x) = 3 + \frac{0 \cdot x^3 - 16 \cdot 3x^2}{x^6} = 3 - \frac{48}{x^4} = 0$$

א. מצא את הנקודה על גרף הפונקציה בתחום $x > 0$ ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הוא מינימלי. **(הדרכה:** צריך למצוא מינימום לנגזרת של הפונקציה).

פתרון

$$y'' = g'(x) = 3 - \frac{48}{x^4} = 0$$

$$3 - \frac{48}{x^4} = 0 \;/\cdot x^4$$

$$3x^4 - 48 = 0 \;/: 3$$

$$x^4 - 16 = 0 \;/+16$$

$$x^4 = 16$$

$$x = 2 \qquad \cancel{x = -2}$$

א. מצא את הנקודה על גרף הפונקציה בתחום $x > 0$ ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הוא מינימלי. (**הדרכה:** צריך למצוא מינימום לנגזרת של הפונקציה).

פתרון

$$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{x^2}$$

$$y' = g(x) = 3x + \frac{16}{x^3}$$

$$y'' = g'(x) = 3 - \frac{48}{x^4}$$

כאשר $x = 2$ יש לנגזרת ערך קיצון

x	1	2	4
$g(x)$	19	8	12.25

מינימום

כאשר $x = 2$ שיפוע המשיק הוא מינימלי, נמצא את ערכו של y:

$$y = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - \frac{8}{2^2} = 4$$

$$(2, 4)$$

ב. מצא את משוואת המשיק בעל השיפוע המינימלי.

פתרון

$$y=\frac{3}{2}x^2-\frac{8}{x^2}$$

בנקודה $(2,4)$ עובר משיק לפונקציה עם שיפוע מינימלי

$$y'=g(x)=3x+\frac{16}{x^3}$$

$$g'(x)=3-\frac{48}{x^4}$$

שיפוע המשיק הוא:

$$g(2)=3\cdot 2+\frac{16}{2^3}=8$$

נמצא את משוואת המשיק:

$$y-4=8(x-2)\,/+4$$

$$y=8x-16+4$$

$$\mathbf{y=8x-12}$$

ג. מצא את הזוית שהמשיק בעל השיפוע המינימלי יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

משוואת המשיק: $y = 8x - 12$

ידוע ש- tan(הזווית) שישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x שווה לשיפוע הישר:

$$tan\alpha = 8$$

$$\boldsymbol{\alpha = 82.87°}$$

בהצלחה