פתרון תרגיל

בעיות קיצון –
תרגילים לחזרה

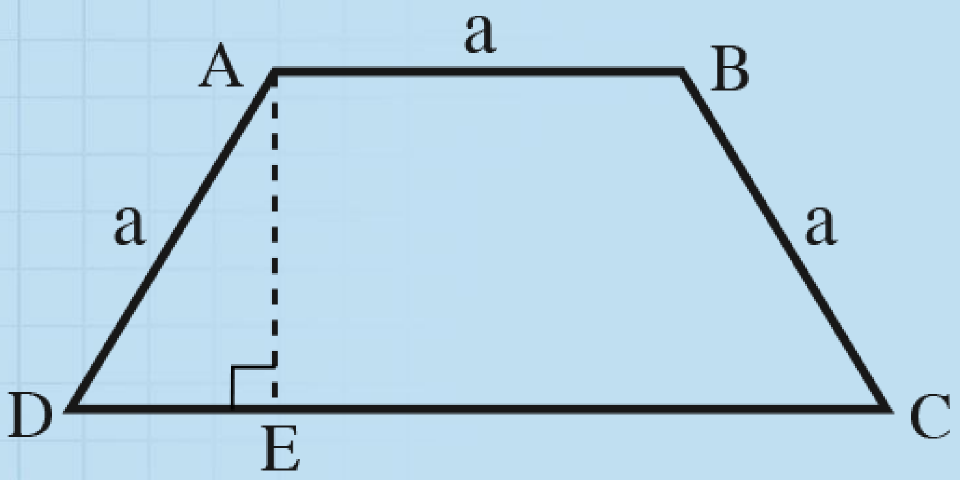
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 229, ת. 4

השאלה

4) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AB \parallel DC)$

נתון $AD = AB = BC = a$. הגובה מקודקוד A הוא AE.



א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

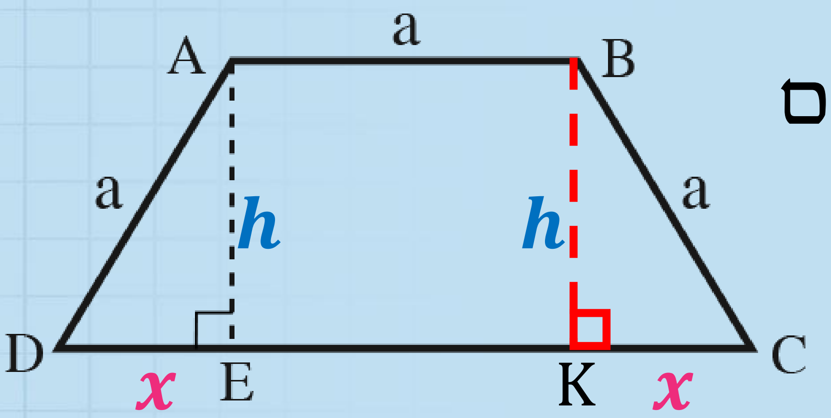
ב. מהי הזוית החדה של הטרפז כאשר שטחו מקסימלי?

ג. מצא את השטח המקסימלי אם $a =$ 2 ס"מ.

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



נסמן $DE = x$ ונוריד גובה נוסף.

הגבהים שווים כי בין ישרים מקבילים המרחקים שווים

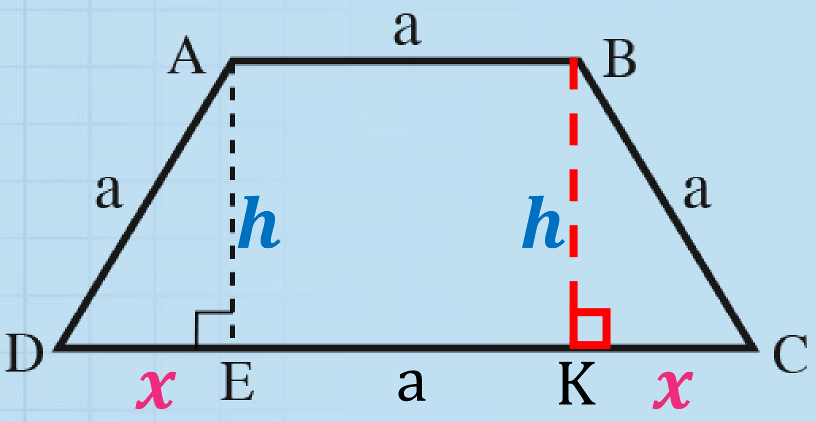
שני המשולשים שנוצרו בתוך הטרפז בצדדים חופפים

מהחפיפה נובע שגם KC שווה x

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



ניתן להוכיח שהמרובע ABKE הוא מלבן.

לכן EK = a

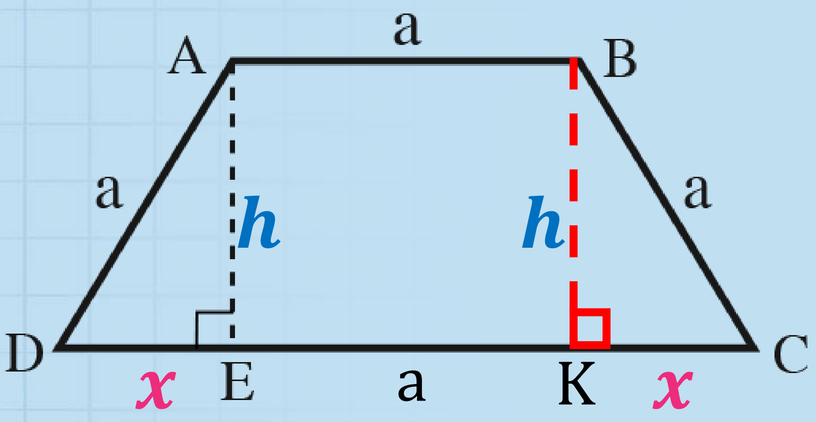
בסיסי הטרפז: a , $a+2x$

גובה הטרפז: h

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



נביע את גובה הטרפז בעזרת x

נשתמש במשפט פיתגורס:

$$x^2 + h^2 = a^2$$

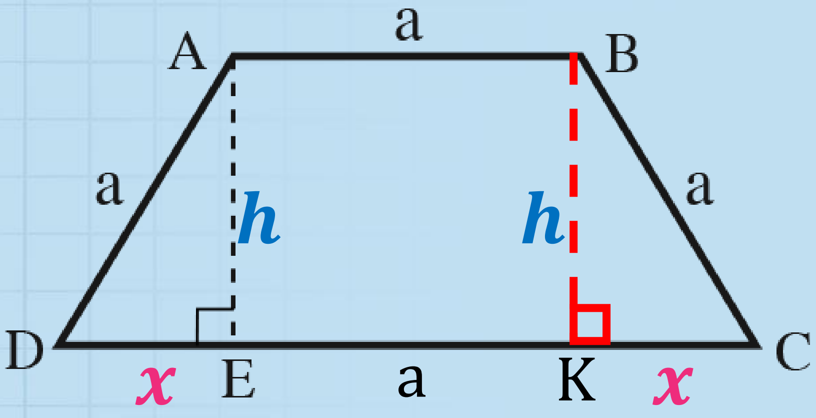
$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



בסיסי הטרפז: a , $a+2x$

גובה הטרפז: $h=\sqrt{a^2-x^2}$

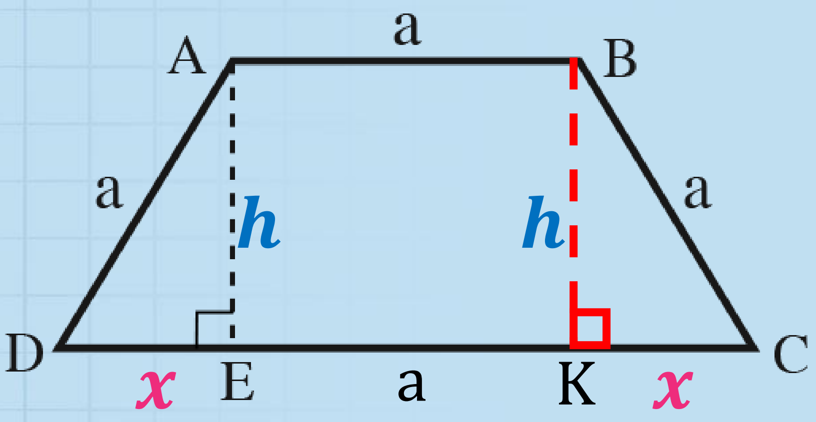
נמצא ערך מקסימלי לפונקציה שמייצגת את שטח הטרפז

$$f(x)=\frac{(2a+2x)\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



$$\text{שטח הטרפז } f(x) = \frac{(2a+2x)\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

$$= \frac{2(a+x)\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

$$\text{שטח הטרפז } f(x) = (a+x)\sqrt{a^2-x^2}$$

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

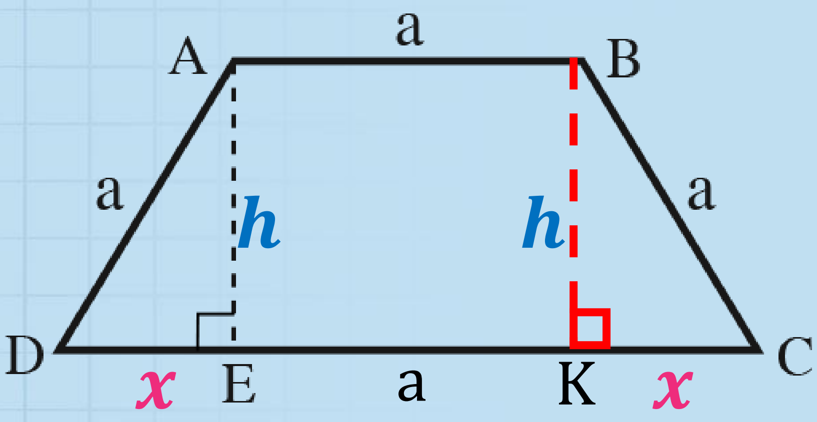
הערה: (עמוד 189)

בבעיות מינימום ומקסימום שבהן יש פונקציה עם שורש ריבועי ניתן בהרבה מקרים להעלות בריבוע את הפונקציה וכך להימנע מגזירה של פונקציה עם שורש. למעשה הגזירה היא של פולינום בלבד. הסיבה היא שבבעיות כאלה נקודת הקיצון של הפונקציה בריבוע היא כמו של הפונקציה המקורית. נדגים זאת לגבי הדוגמא האחרונה.

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



שטח הטרפז $f(x)=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$

$$[f(x)]^2=(a+x)^2(a^2-x^2)$$

נגזור ונשווה לאפס למציאת ערך מקסימלי:

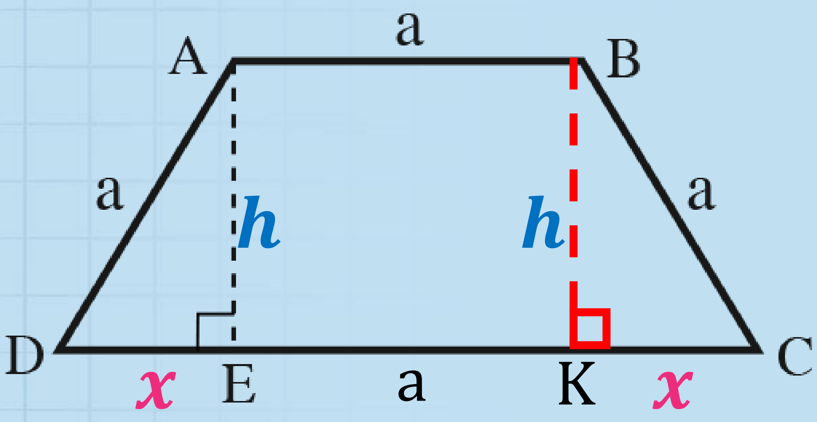
$$[(a+x)^2(a^2-x^2)]' = \; 2(a+x)\cdot(a^2-x^2)+(a+x)^2\cdot(-2x)$$

$$=2(a+x)[a^2-x^2-x(a+x)]$$

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



נגזרת $= 2(a+x)[a^2 - x^2 - x(a+x)]$

$$= 2(a+x)(a^2 - x^2 - ax - x^2)$$

$$= 2(a+x)(-2x^2 - ax + a^2)$$

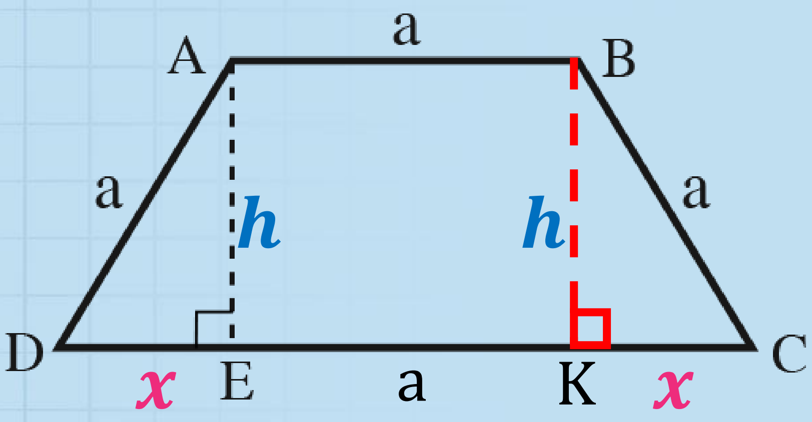
$$-2x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$\cancel{x = -a}$$

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



$$-2x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot (-2)a^2}}{-4} = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{-4}$$

$$= \frac{a \pm 3a}{-4}$$

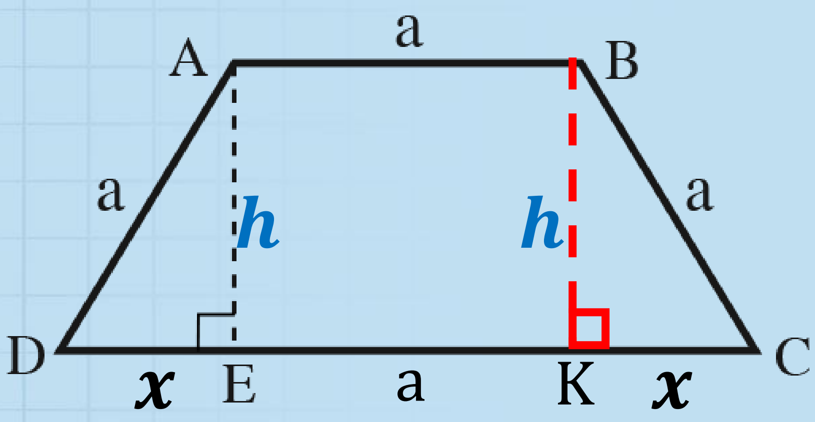
$$= \frac{4a}{-4} = \cancel{-a}$$

$$= \frac{-2a}{-4} = 0.5a$$

א. מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



חיובי

$$\text{נגזרת} = 2(a+x)(-2x^2 - ax + a^2)$$

x	$0.1a$	$0.5a$	$0.6a$
y'	$+$		$-$

מקסימום

$$-2\cdot(0.1a)^2 - a\cdot 0.1a + a^2$$

$$0.88a^2$$

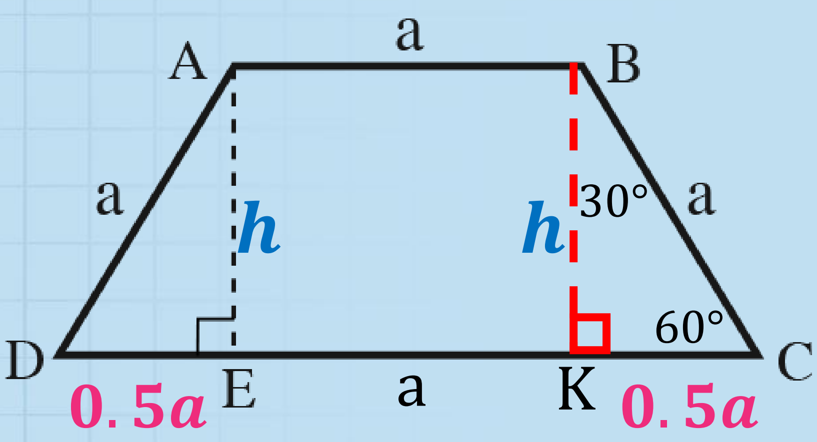
$$-2\cdot(0.6a)^2 - a\cdot 0.6a + a^2$$

$$-0.32a^2$$

ב.   מהי הזוית החדה של הטרפז כאשר שטחו מקסימלי?

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה $30°$

לכן $\sphericalangle KBC = 30°$

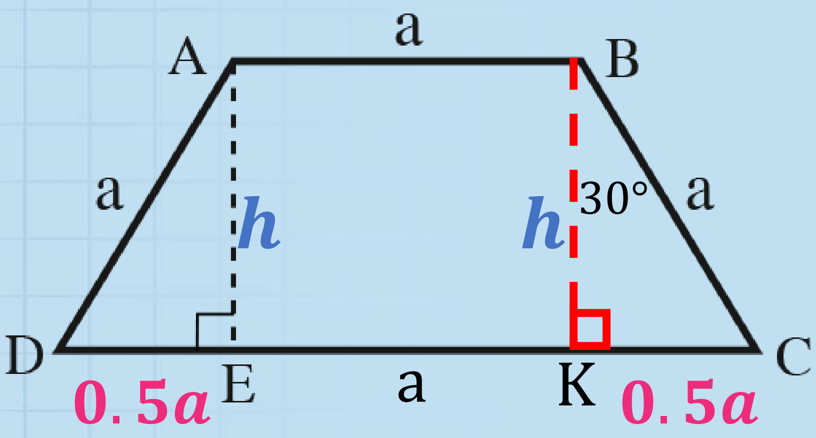
לכן $\sphericalangle C = 60°$ (סכום הזוויות במשולש)

כלומר, הזוית החדה של הטרפז כאשר שטחו מקסימלי היא $60°$

ג. מצא את השטח המקסימלי אם $a = 2$ ס"מ.

פתרון

בטרפז שווה שוקיים ABCD



שטח הטרפז $f(x) = (a+x)\sqrt{a^2 - x^2}$

$a = 2 \quad x = 0.5a \Rightarrow x = 1$

$$f(1) = (2+1)\sqrt{2^2 - 1^2} = 3\sqrt{3}$$

השטח המקסימלי של הטרפז הוא $3\sqrt{3}$ או $\sqrt{27}$ סמ"ר

בהצלחה