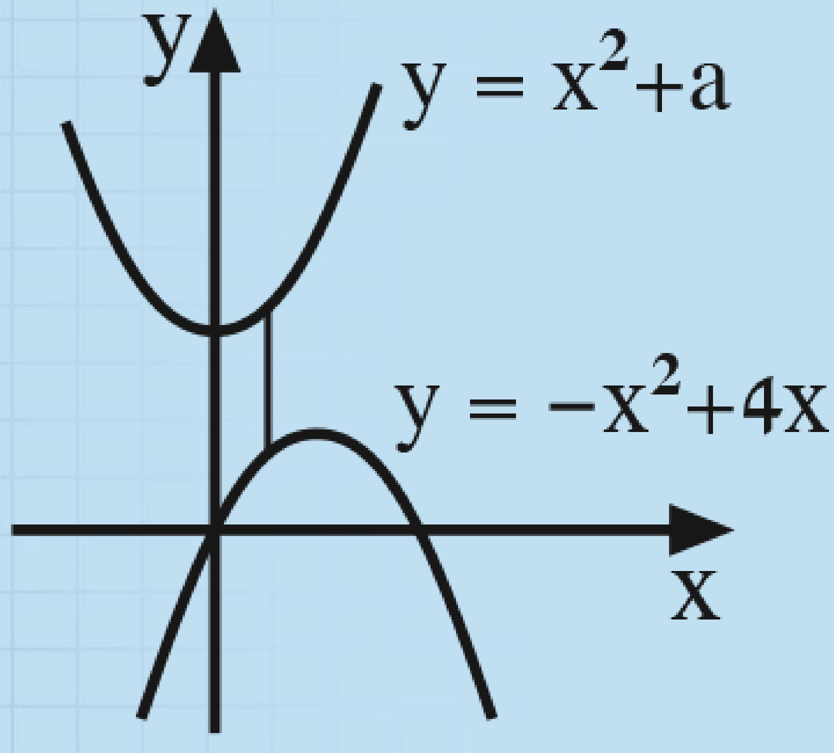
פתרון תרגיל
בעיות קיצון
בפונקציות וגרפים
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 226, ת. 35

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

השאלה



35) מבין כל הקטעים, המאונכים לציר ה-x,
שמחברים את גרף הפרבולה $y = x^2+a$
עם גרף הפרבולה $y = -x^2+4x$
אורכו של הקטע הקצר ביותר הוא 4.

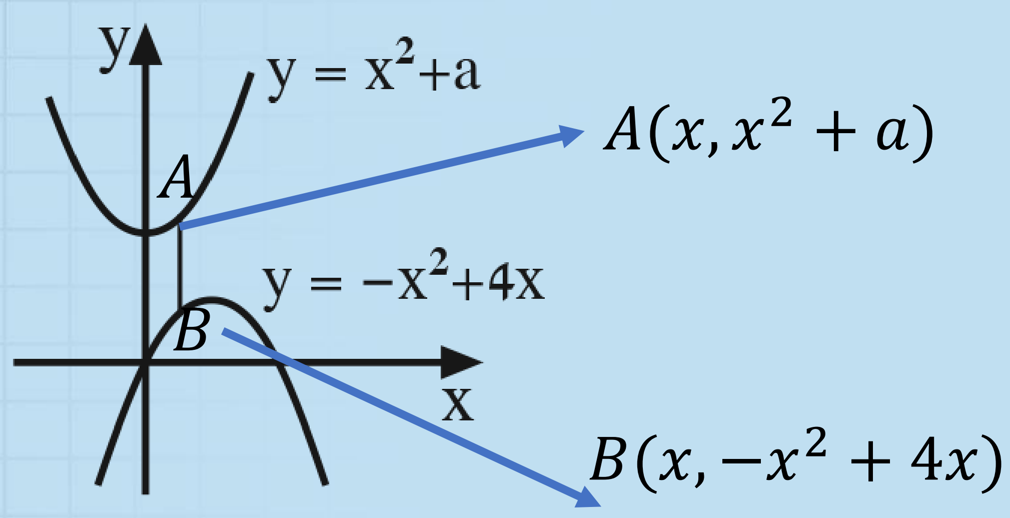
א. מצא את a.

ב. מצא בתחום $-1 \le x \le 3$ את אורכו של הקטע הארוך ביותר מבין הקטעים הנ״ל.

א. מצא את a.

פתרון

מבין כל הקטעים, המאונכים לציר ה-x,
שמחברים את גרף הפרבולה $y = x^2+a$
עם גרף הפרבולה $y = -x^2+4x$
אורכו של הקטע הקצר ביותר הוא 4.



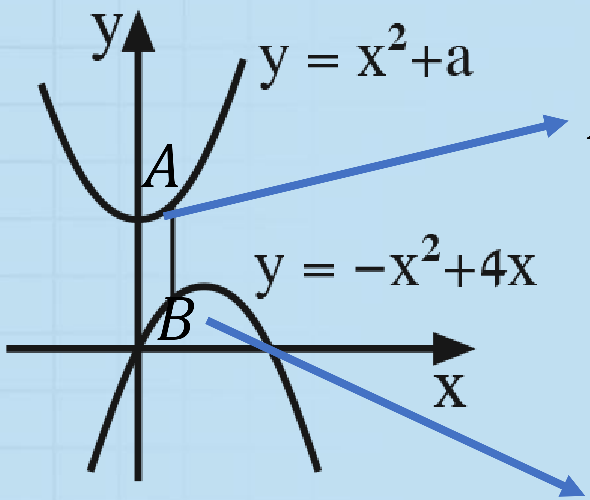
אורך הקטע AB הוא ההפרש בין ערכי ה-y של הנקודות

נמצא ערך קיצון לפונקציה המייצגת את אורך AB

$$f(x) = x^2 + a - (-x^2 + 4x) \quad = x^2 + a + x^2 - 4x = 2x^2 - 4x + a$$

א. מצא את a.

פתרון



$A(x, x^2 + a)$

$B(x, -x^2 + 4x)$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + a$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$f'(x) = 4x - 4 = 0$$

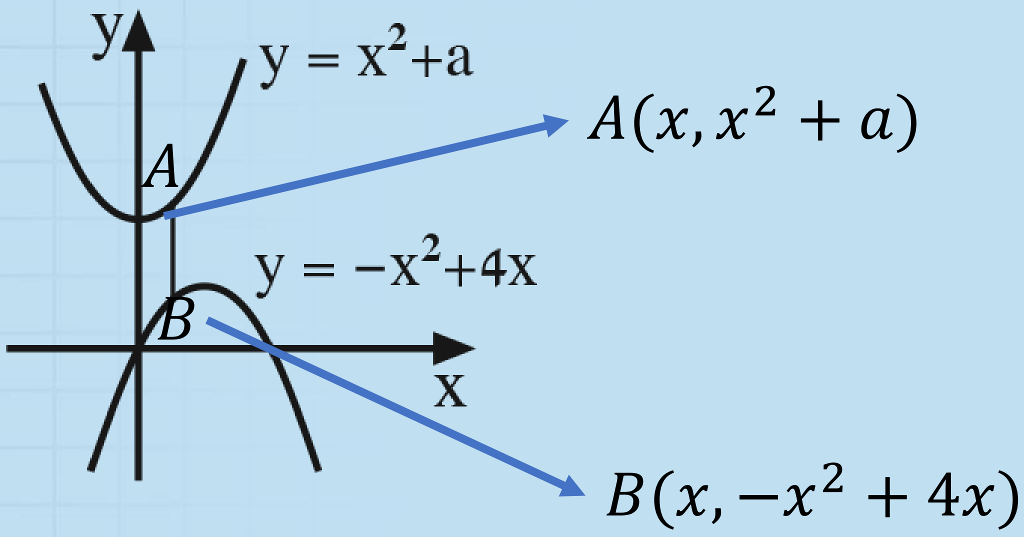
$$4x = 4$$

$$x = 1$$

מכיוון שהפונקציה שמייצגת את אורך הקטע היא פונקציה ריבועית בה המקדם של x^2 חיובי, ניתן להסיק שנקודת הקיצון שלה היא מינימום

א. מצא את a.

פתרון



אורכו של הקטע הקצר ביותר הוא 4.

$$f(x) = 2x^2 - 4x + a$$

$$x = 1$$

מסקנה מהנתון: $f(1) = 4$

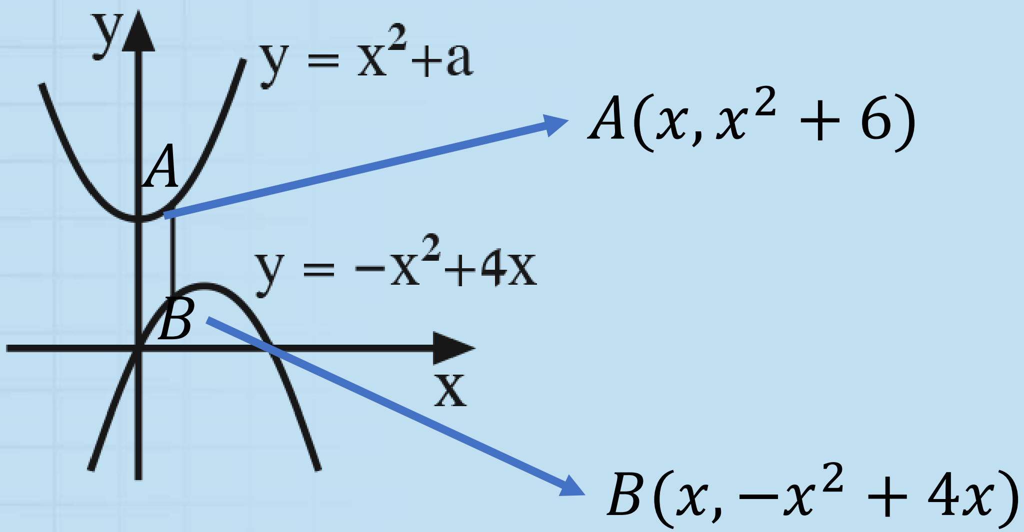
$$2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + a = 4$$

$$-2 + a = 4$$

$$\boldsymbol{a = 6}$$

ב. מצא בתחום $-1 \le x \le 3$ את אורכו של הקטע הארוך ביותר מבין הקטעים הנ"ל.

פתרון



$$f(x) = 2x^2 - 4x + 6$$

לפונקציה של האורך יש ערך מינימלי פנימי.

הנקודות בקצה התחום הן גם נקודות קיצון על-פי הכלל שפונקציה רציפה בתחום סגור מקבלת ערכי קיצון בקצה.

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 6 = 12$$

$$f(3) = 2\cdot 3^2 - 4\cdot 3 + 6 = 12$$

הקטעים הארוכים ביותר בתחום הנתון נמצאים בקצות התחום ואורכם 12 יחידות אורך

בהצלחה