הקנייה

משוואות דו ריבועיות

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

481–581 , עמ' 107–108

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

הקנייה

נדון עכשיו במשוואות מהצורה: $\boxed{ax^4+bx^2+c = 0 \quad (a \neq 0)}$.

משוואה כזאת נקראת **משוואה דו ריבועית**. במשוואה דו ריבועית **חייב** להופיע x^4 **ויכולים** להופיע x^2 ומקדם חופשי. **לא יכולים** להופיע x^3 ולא x. הפתרון של משוואה דו ריבועית מבוסס על פתרון של משוואה ריבועית. כדי לעשות זאת נעזרים **במשתנה אחר**.

תרגיל לדוגמה

פתור את המשוואה הדו ריבועית $x^4-10x^2+9=0$.

נפתור את המשוואה בעזרת משתנה אחר t. נסמן $t = x^2$.

אם **נעלה בריבוע** נקבל $t^2 = x^4$.

נרשום עכשיו את המשוואה הנ"ל **בעזרת המשתנה** t ונקבל את המשוואה

הריבועית הבאה: $t^2-10t+9=0$.

נפתור עכשיו את המשוואה שקיבלנו בעזרת נוסחת השורשים:

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-4\cdot 1\cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

תרגיל לדוגמה

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\{ \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

נחזור עכשיו למשתנה x. עפ"י הפתרונות שקיבלנו עבור t נקבל את האפשרויות הבאות:

(1) אם $t = 9$ אז $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

(2) אם $t = 1$ אז $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

לסיכום: למשוואה $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ יש 4 **שורשים** והם:

$x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

תרגיל לדוגמה

פתור את המשוואה $x^4-3x^2-4=0$.

פתרון:

נסמן $t=x^2$ ואז המשוואה היא $t^2-3t-4=0$.

פתרונות המשוואה הריבועית הם $t_1=4$, $t_2=-1$.

לכן האפשרויות לגבי x הן:

(1) $x^2=4$ ואז $x=\pm 2$. (2) $x^2=-1$ וזה **לא ייתכן**.

לסיכום: הפתרונות הם $x_1=2$, $x_2=-2$.

הקנייה

נוכל לסכם לגבי **מספר השורשים הממשיים** של **משוואה דו ריבועית:**

א) למשוואה הדו ריבועית יש **4** שורשים אם למשוואה עם המשתנה t יש **2** שורשים **חיוביים.**

ב) למשוואה הדו ריבועית יש **3** שורשים אם למשוואה עם המשתנה t יש שורש אחד **חיובי** ושורש אחד השווה **לאפס.**

ג) למשוואה הדו ריבועית יש **2** שורשים אם למשוואה עם המשתנה t יש שורש אחד **חיובי** ושורש אחד **שלילי או** שיש לה שורש **אחד** בלבד שהוא **חיובי.**

ד) למשוואה הדו ריבועית יש שורש **אחד** אם למשוואה עם המשתנה t יש שורש אחד השווה **לאפס** או שורש אחד השווה **לאפס** ושורש אחד **שלילי.**

הקנייה

ה) למשוואה הדו ריבועית **אין** שורשים במקרים הבאים:

(1) למשוואה עם המשתנה t **אין** שורשים.

(2) למשוואה עם המשתנה t יש שורש **אחד** בלבד שהוא **שלילי**.

(3) למשוואה עם המשתנה t יש **2** שורשים **שליליים**.

בהצלחה