פתרון תרגיל

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 220, ת. 5

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה
כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע"מ

השאלה

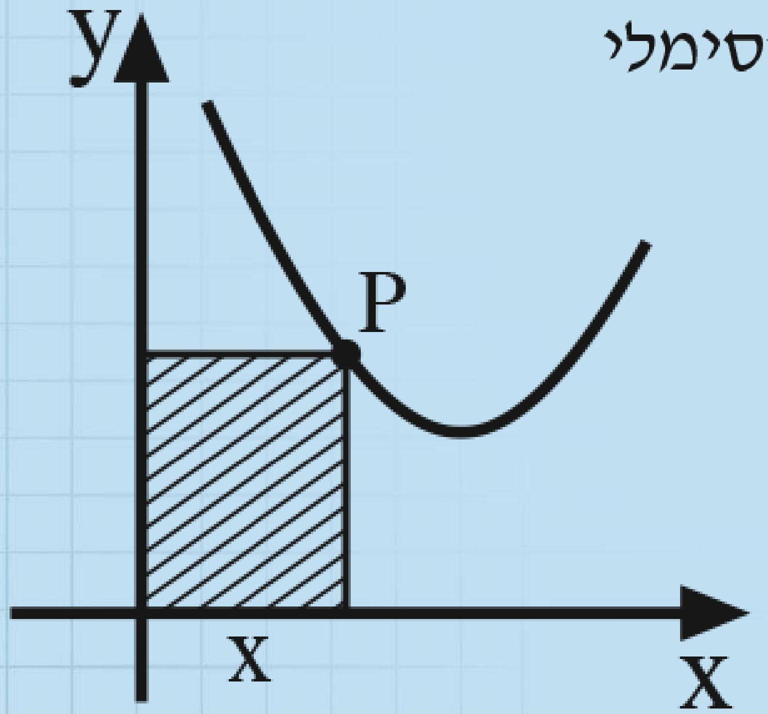
5) בין גרף הפונקציה $y = x + \frac{1}{x^2}$ ברביע הראשון והצירים חסום מלבן.

א. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מינימלי.

ב. מצא את ההיקף המינימלי.

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מקסימלי אם נתון ששיעור ה-x של P הוא בתחום $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

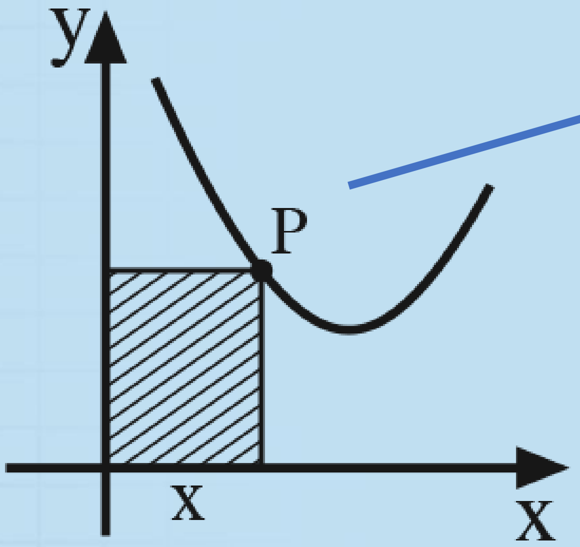
(**הדרכה:** צריך למצוא מקסימום מוחלט).



א. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מינימלי.

פתרון

$$y = x + \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$



$$\left(x, x + \frac{1}{x^2}\right)$$

רוחב המלבן = x

אורך המלבן = $x + \frac{1}{x^2}$

היקף המלבן:

$$f(x) = 2x + 2\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = 2x + 2x + \frac{2}{x^2} = 4x + \frac{2}{x^2}$$

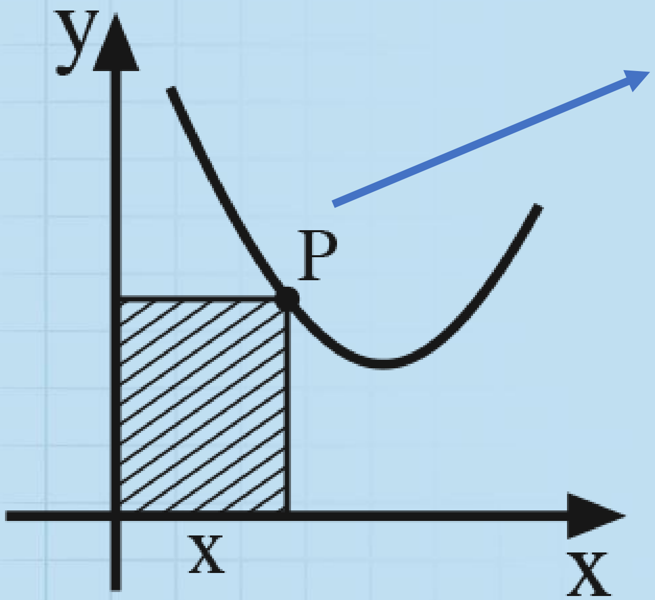
א. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מינימלי.

פתרון

היקף המלבן: $f(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$

$y = x + \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$

$\left(x, x + \frac{1}{x^2}\right)$



נמצא ערך מינימלי להיקף המלבן:

$$f'(x) = 4 + \frac{0 \cdot x^2 - 2 \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = 4 - \frac{4x}{x^4} = 4 - \frac{4}{x^3}$$

$$f'(x) = 0$$

$$4 - \frac{4}{x^3} = 0 / \cdot x^3$$

$$4x^3 - 4 = 0 / +4$$

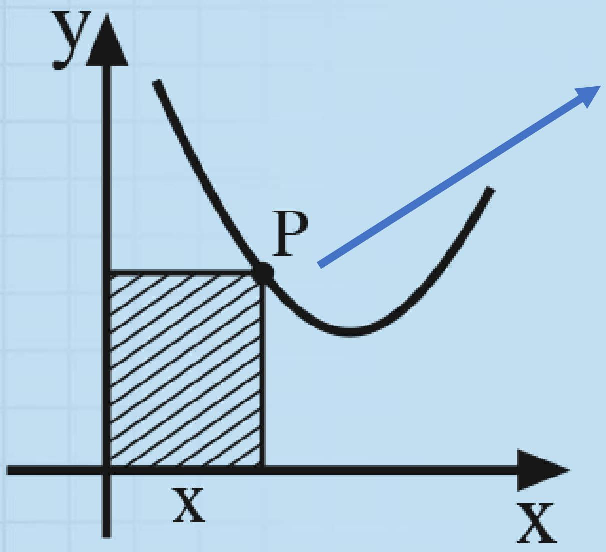
$$4x^3 = 4 / : 4$$

$$x = 1$$

א. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מינימלי.

פתרון

$$y = x + \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$$



$$\left(x, x + \frac{1}{x^2}\right)$$

היקף המלבן: $f(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$

נמצא ערך מינימלי להיקף המלבן:

$$x = 1$$

$$f(2) = 4 \cdot 2 + \frac{2}{2^2}$$

$$f(2) = 8.5$$

$$f(1) = 4 \cdot 1 + \frac{2}{1^2}$$

$$f(1) = 6$$

$$f(0.5) = 4 \cdot 0.5 + \frac{2}{0.5^2}$$

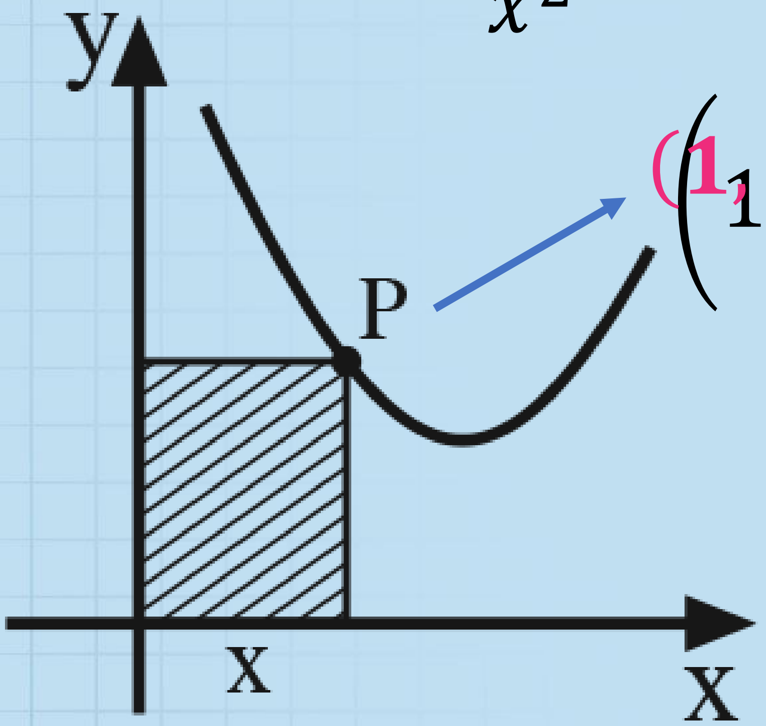
$$f(0.5) = 10$$

מינימום

א. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מינימלי.

פתרון

$y = x + \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$



$(1,2)$

$\left(1, 1 + \frac{1}{1^2}\right)$

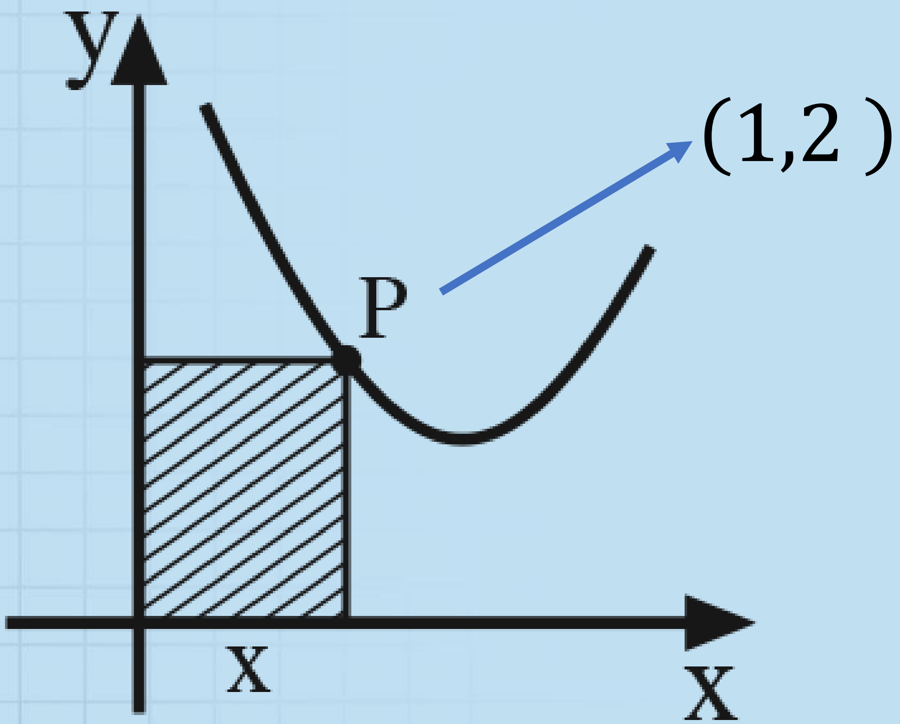
היקף המלבן: $f(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$

$x = 1 \qquad f(1) = 6$

ב. מצא את ההיקף המינימלי.

פתרון

$$y = x + \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$$



היקף המלבן: $f(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$

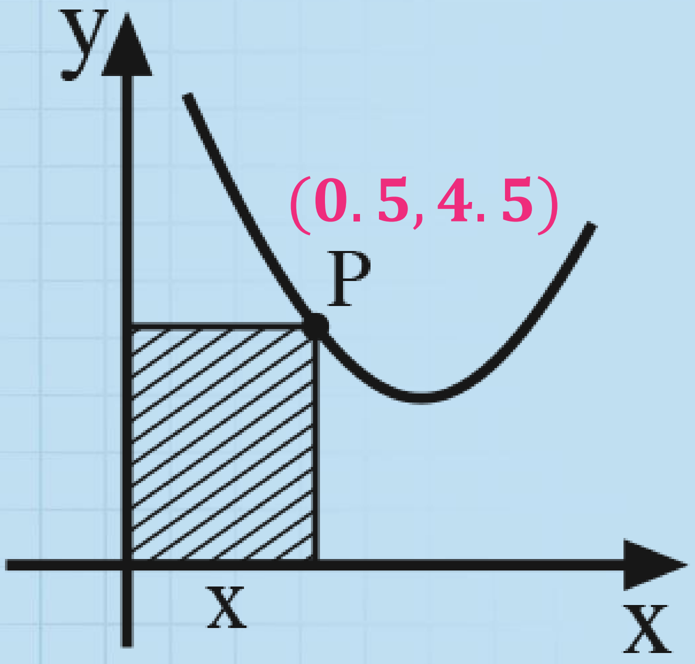
$x = 1 \qquad f(1) = 6$

ההיקף המינימלי של המלבן הוא 6 יח'

ג. מצא את שיעורי הנקודה P עבורה היקף המלבן הוא מקסימלי
אם נתון ששיעור ה-x של P הוא בתחום $\frac{1}{2} \le x \le 2$.

פתרון

$$y = x + \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$



היקף המלבן: $f(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$

$f(0.5) = 10$ $f(1) = 6$ $f(2) = 8.5$

מינימום

ההיקף המקסימלי של המלבן בתחום הנתון הוא 10 יח'
(נמצא בקצה תחום ההגדרה)

$$y(0.5) = 0.5 + \frac{1}{0.5^2} = 4.5$$

נקודה P היא: $(0.5, 4.5)$

בהצלחה