תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון
בפונקציות וגרפים

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 217–219, דוגמאות א' + ב' + ג'

המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

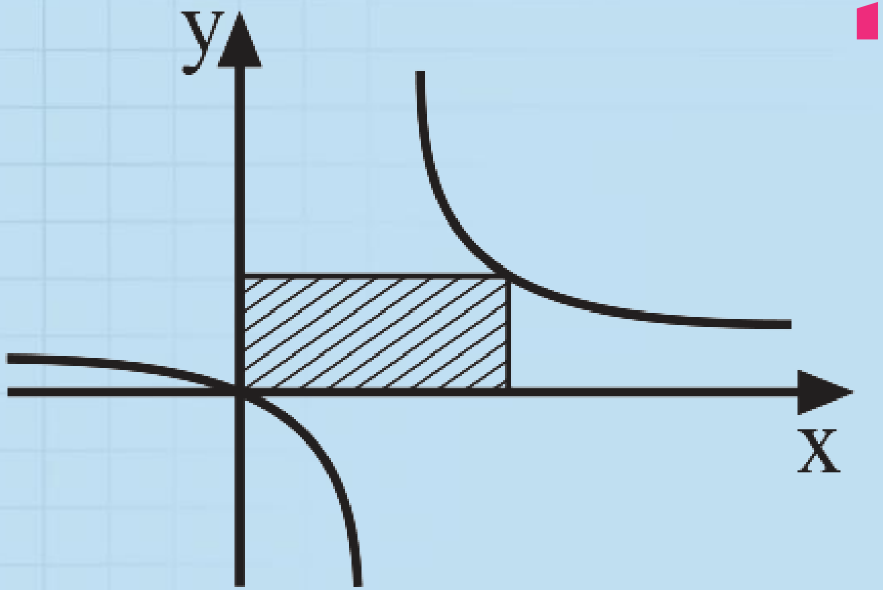
תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים – פונקציות רציונאליות

בסעיף זה נדון בבעיות קיצון **בפונקציות וגרפים**. דוגמאות ניתן לראות בספר **מתמטיקה חלק א'**. נביא דוגמאות.

תרגיל לדוגמה



דוגמא א':

בין גרף הפונקציה $y = \frac{x}{x-3}$ והצירים,
ברביע הראשון, חסום מלבן כמתואר בציור.
מצא את שיעורי קודקוד המלבן, שנמצא על גרף
הפונקציה, שעבורו שטח המלבן הוא מינימלי.

פתרון:

אם שיעור ה-x של הנקודה המבוקשת הוא x אז שיעור ה-y הוא $\frac{x}{x-3}$

כי הנקודה נמצאת על הפונקציה $y = \frac{x}{x-3}$. נסמן ב-$f(x)$ את שטח המלבן

ונקבל $f(x) = x \cdot \frac{x}{x-3} = \frac{x^2}{x-3}$. נגזור ונשווה ל-0: $f'(x) = \frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2} = 0$.

תרגיל לדוגמה

לכן $x^2-6x=0$ והפתרון המתאים הוא $x=6$.

קל לראות שזאת נקודת מינימום.

ה-y המתאים הוא $y=\frac{6}{6-3}=3$.

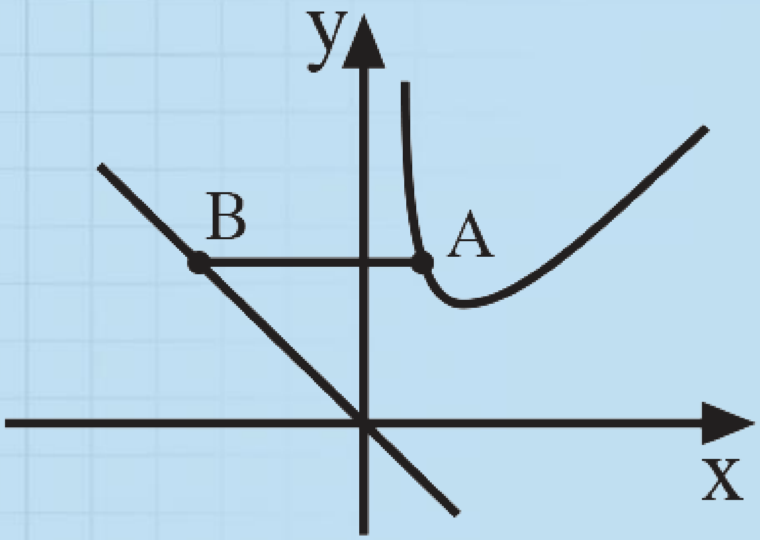
לכן הנקודה המבוקשת היא $(6,3)$.

שטח המלבן המינימלי הוא $6\cdot 3=18$.

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

נתונה הפונקציה $y = x + \frac{8}{x}$ בתחום $x > 0$ ונתון הישר $y = -x$. A היא נקודה על גרף הפונקציה ו-B נקודה על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה-x.



א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורה הקטע AB הוא בעל אורך מינימלי.

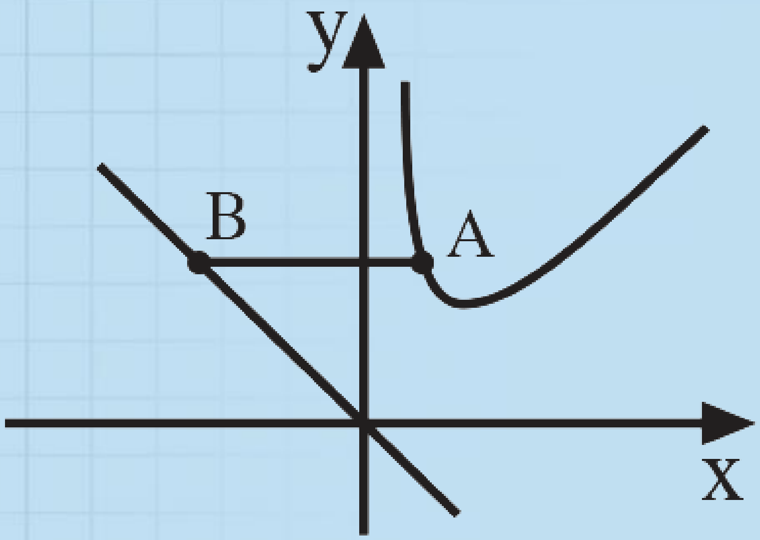
ב. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון:

א. עלינו למצוא מינימום לאורך הקטע AB. נשים לב שמתקיים $y_A = y_B$ וכן $AB = x_A - x_B$.

נסמן $x_A = x$, $x_B = x_0$ **ונביע את** x_0 **בעזרת** x.

תרגיל לדוגמה



פתרון:

$y_A = x + \frac{8}{x}$

וכן $y_B = -x_0$.

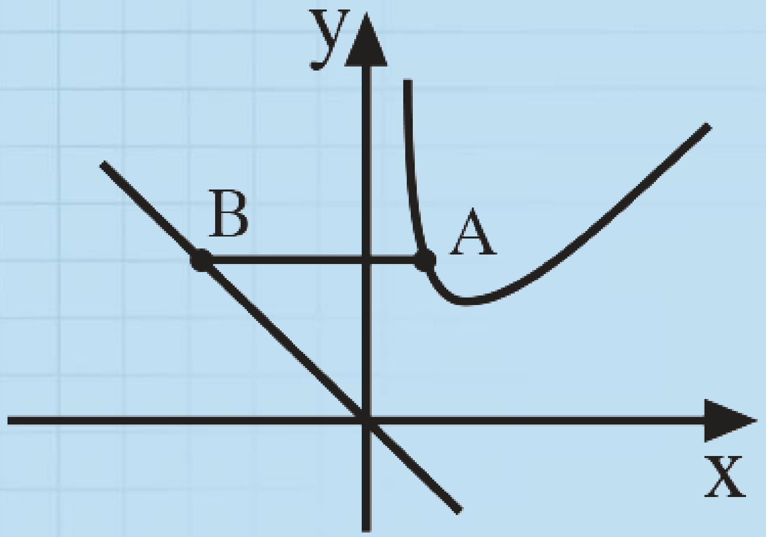
לכן $-x_0 = x + \frac{8}{x}$, מכאן נקבל $x_0 = -x - \frac{8}{x}$.

עכשיו נביע את אורך הקטע AB בעזרת x. נקבל:

$AB = x_A - x_B = x - x_0 = x - (-x - \frac{8}{x}) = 2x + \frac{8}{x}$.

נסמן ב-$f(x)$ את אורך הקטע AB ונקבל את הפונקציה $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$.

נגזור ונשווה לאפס, נקבל: $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = 0$. מפתרון המשוואה נקבל $x = \pm 2$.



תרגיל לדוגמה

פתרון:

בתחום $x > 0$ הפתרון הוא $x = 2$.

ניתן להראות שמתקבל מינימום בעזרת הנגזרת השנייה

או ע"י הצבת $x = 1$ ו-$x = 3$ בנגזרת הראשונה.

עבור $x = 1$ נקבל $f'(1) < 0$ ועבור $x = 3$ נקבל $f'(3) > 0$.

כלומר הפונקציה יורדת בסביבה משמאל ל-$x = 2$ ועולה בסביבה מימין ל-$x = 2$,

ז"א ב-$x = 2$ יש לה מינימום.

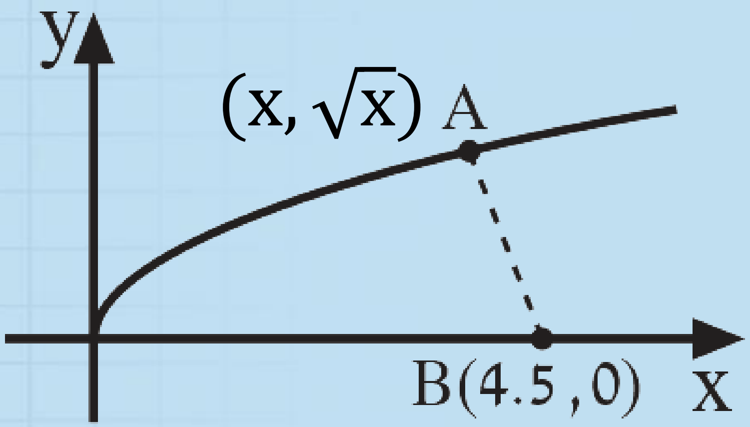
שיעור ה-y של A הוא $y_A = 2 + \frac{8}{2^2} = 4$.

לסיכום: שיעורי הנקודה A עבורה אורך הקטע AB הוא מינימלי הם $(2,4)$.

ב. האורך המינימלי של AB הוא: $f(2) = 2 \cdot 2 + \frac{8}{2^2} = 4+2 = 6$.

תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים – פונקציות עם שורשים



דוגמא ג':

מצא על גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ את הנקודה A הקרובה ביותר לנקודה $B(4.5, 0)$.

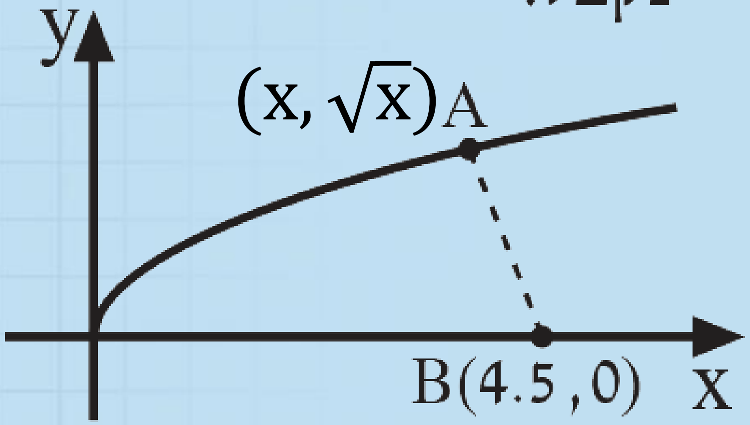
פתרון:

אם שיעור ה-x של הנקודה A הוא x אז שיעור ה-y שלה הוא $\sqrt{x}$ כי הנקודה נמצאת על גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$.

תרגיל לדוגמה

ניעזר בנוסחה למרחק בין הנקודות (x_1, y_1) ו-(x_2, y_2): $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

נסמן ב-y את המרחק בין הנקודות $A(x, \sqrt{x})$ ו-$B(4.5, 0)$, נקבל:



$y = \sqrt{(x-4.5)^2+(\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{(x-4.5)^2+x}$.

אם נגזור את y^2 ונשווה לאפס נקבל:

$(y^2)' = 2(x-4.5)+1 = 2x-9+1 = 2x-8 = 0$

לכן $x = 4$ ובעזרת הנגזרת השנייה קל לראות שזהו מינימום.

שיעור ה-y של הנקודה A הוא $\sqrt{4} = 2$.

לסיכום: הנקודה $(4, 2)$ על גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ היא הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(4.5, 0)$.

בהצלחה