פתרון תרגיל

בעיות קיצון
בהנדסת המרחב

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

481 , עמ' 209, ת. 42

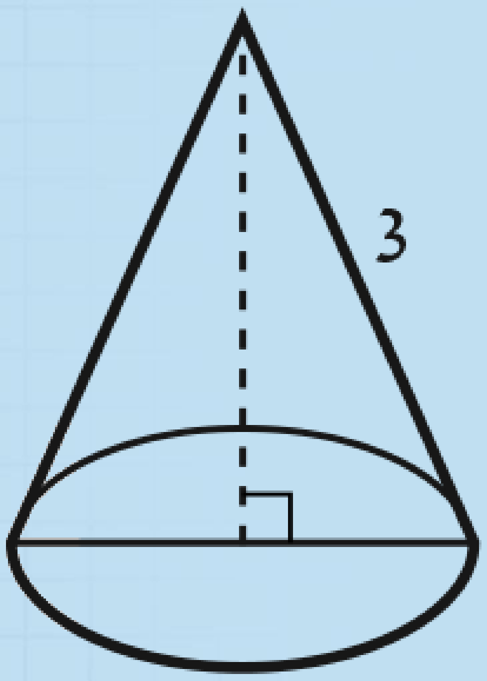
המצגת נערכה ע״י עומרי נווה

השאלה

42) הקו היוצר של **חרוט** ישר הוא 3 ס"מ.

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

ב. מצא את נפחו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.



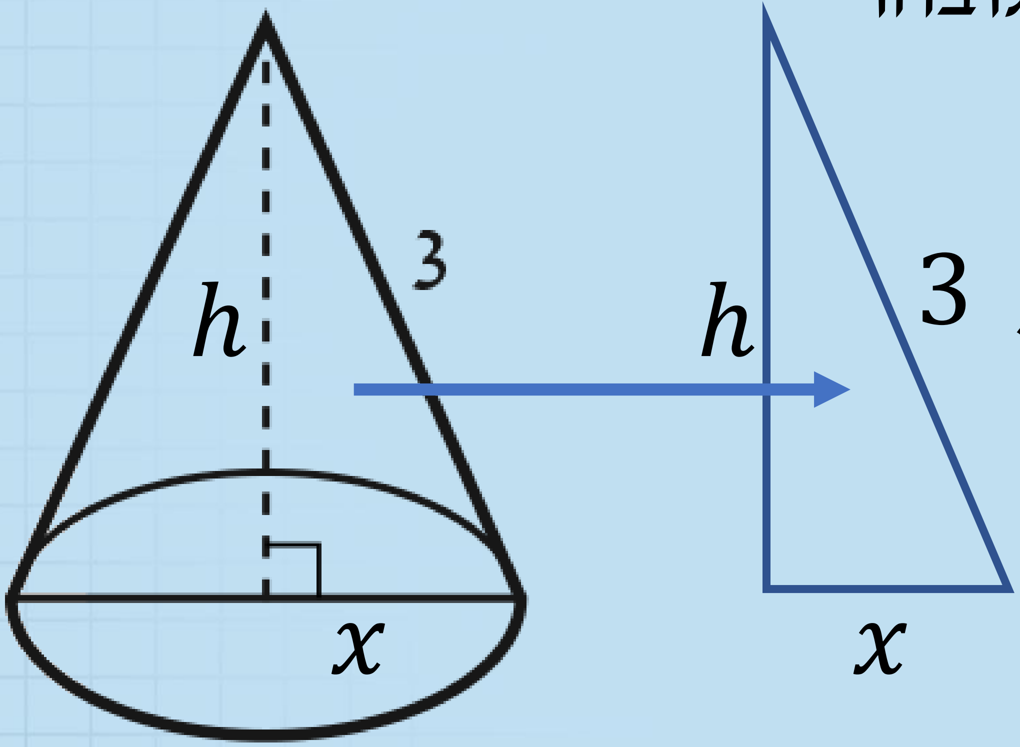
א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון

נסמן ב- x את רדיוס בסיס החרוט וב- h את גובהו

נביט במשולש ישר הזווית שנוצר:

נביע את h באמצעות x בעזרת משפט פיתגורס



$$x^2 + h^2 = 3^2$$

$$h^2 = 9 - x^2$$

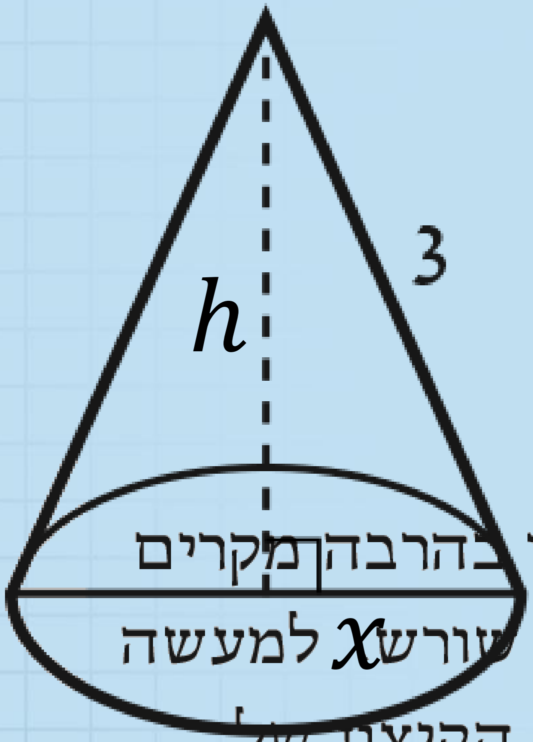
$$h = \sqrt{9 - x^2}$$

תחום הגדרה: $0 < x < 3$

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון

$$\text{נפח חרוט} = \frac{\text{שטח הבסיס} \cdot \text{הגובה}}{3}$$



$$V = \frac{x^2\pi \cdot h}{3} = \frac{x^2\pi \cdot \sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}$$

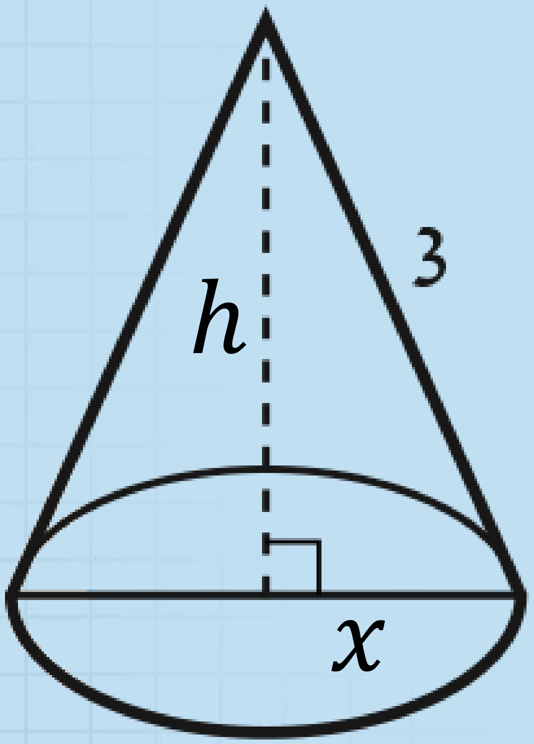
הערה: (עמוד 189)

בבעיות מינימום ומקסימום שבהן יש פונקציה עם שורש ריבועי ניתן בהרבה מקרים להעלות בריבוע את הפונקציה וכך להימנע מגזירה של פונקציה עם שורש למעשה הגזירה היא של פולינום בלבד. הסיבה היא שבבעיות כאלה נקודת הקיצון של הפונקציה בריבוע היא כמו של הפונקציה המקורית.

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון

$$\text{נפח חרוט} = \frac{\text{שטח הבסיס} \cdot \text{הגובה}}{3}$$



$0 < x < 3$

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

$$V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 x^4 \cdot (9 - x^2) = \frac{1}{9}\pi^2(9x^4 - x^6)$$

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

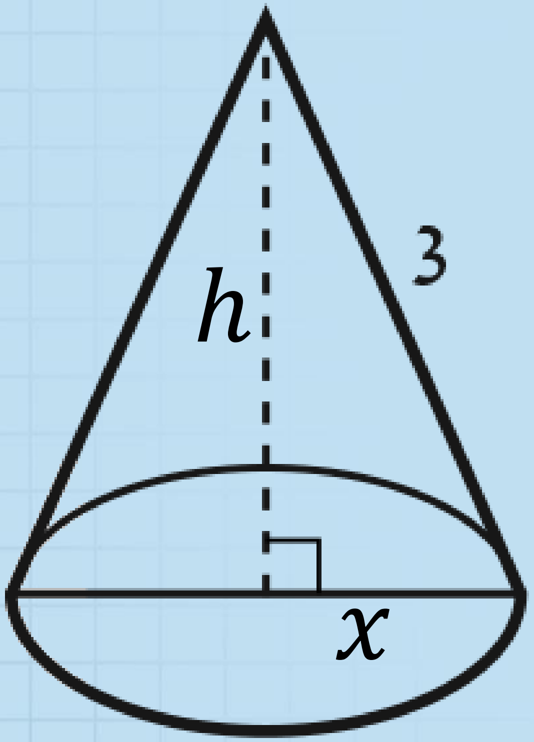
פתרון

$$V^2=\frac{1}{9}\pi^2(9x^4-x^6)$$

נגזור ונשווה לאפס:

$$\left[\frac{1}{9}\pi^2(9x^4-x^6)\right]'=\frac{1}{9}\pi^2(36x^3-6x^5)$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2x^3(6-x^2)=0$$



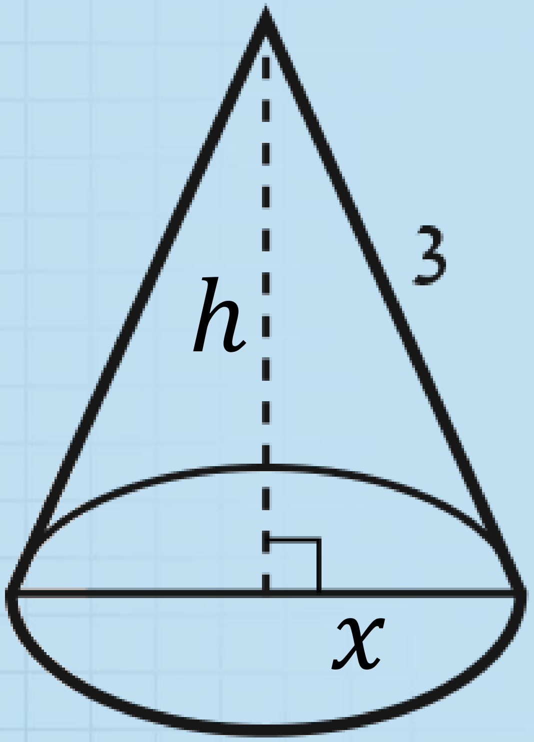
$0<x<3$

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון

$$\frac{2}{3}\pi^2x^3(6-x^2)=0$$

$\cancel{x=0}$ $\cancel{x=-\sqrt{6}}$ $x=\sqrt{6}$

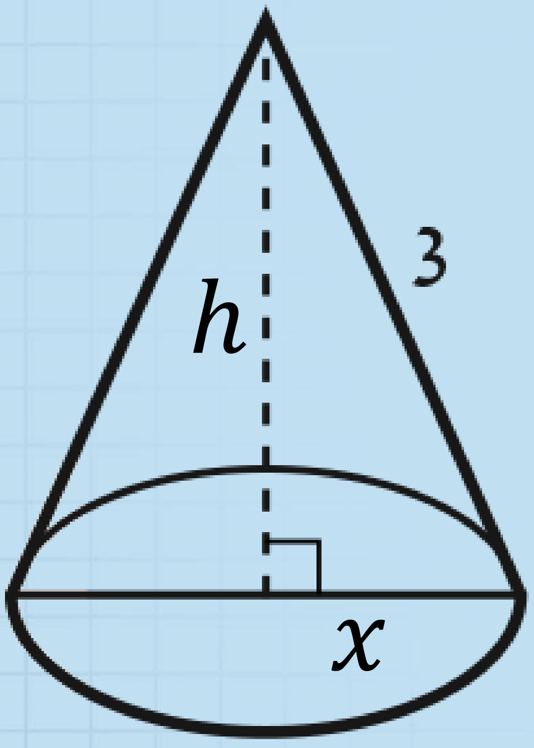


$$0<x<3$$

נציב את $x=\sqrt{6}$ וערכים לפני ואחרי ערך זה בפונקציית הנפח כדי לבדוק שעבורו אכן הנפח מקסימלי – הגדול ביותר

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון



$$0 < x < 3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

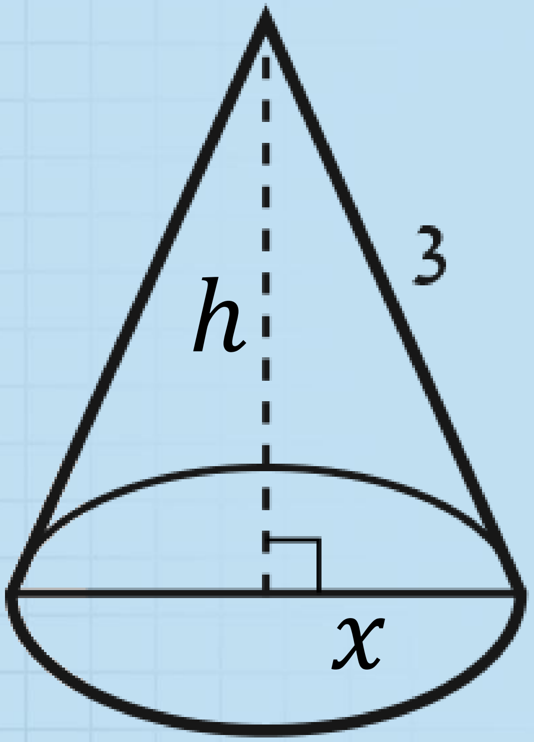
$$V(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{9 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}\pi$$

$$V(\sqrt{6}) = \frac{1}{3}\pi \sqrt{6}^2 \cdot \sqrt{9 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{12}\pi$$

$$V(\sqrt{7}) = \frac{1}{3}\pi \sqrt{7}^2 \cdot \sqrt{9 - \sqrt{7}^2} = \sqrt{10\frac{3}{9}}\ \pi$$

א. מצא את רדיוסו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון



$$0 < x < 3$$

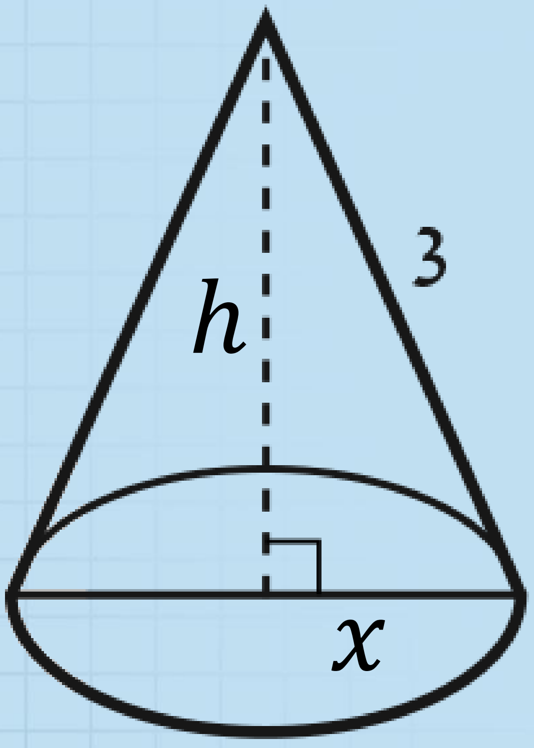
$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

$$V(\sqrt{5}) = \sqrt{6}\pi \quad V(\sqrt{6}) = \sqrt{12}\pi \quad V(\sqrt{7}) = \sqrt{10\frac{3}{9}}\pi$$

מקסימום

ב. מצא את נפחו של החרוט בעל הנפח הגדול ביותר.

פתרון



$0 < x < 3$

$$V(\sqrt{6}) = \sqrt{12}\pi$$

הנפח של החרוט עם הנפח המקסימלי הוא

$\sqrt{12}\pi$ סמ"ק

בהצלחה