תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון
בהנדסת המרחב

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ב'–2

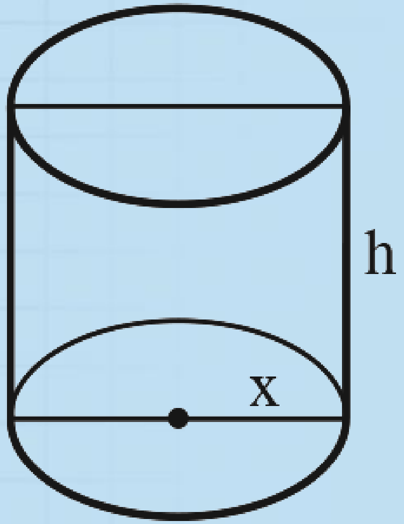
481 , עמ' 200–201, דוגמה ב' + ג'

המצגת נערכה ע"י עומרי נווה

תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב – פונקציות רציונאליות

דוגמא ב׳:



יש לבנות גליל ישר שנפחו 54π סמ״ק. מצא מה צריך להיות רדיוס בסיס הגליל כדי ששטח פניו יהיה מינימלי.

פתרון:

נסמן ב-x את הרדיוס ונביע את הגובה h באמצעות x והנתון הקבוע שהוא הנפח.

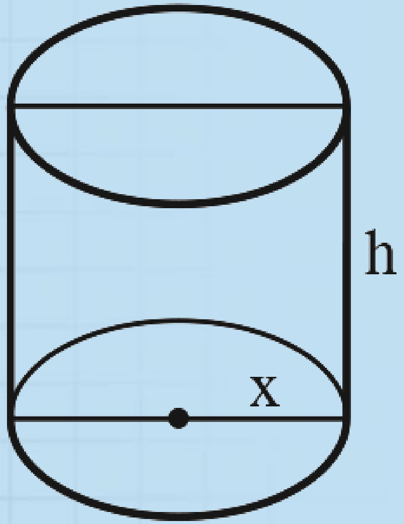
נפח גליל ישר שווה לשטח הבסיס כפול הגובה, לכן, לפי הנתון $\pi x^2 h = 54\pi$.

נחלץ את h ונקבל $h = \frac{54}{x^2}$

תרגיל לדוגמה

שטח פני הגליל (נסמנו ב-y) שרדיוסו x וגובהו h הוא $y = 2\pi x^2 + 2\pi xh$.

לכן $y = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{54}{x^2} = 2\pi x^2 + \frac{108\pi}{x}$.



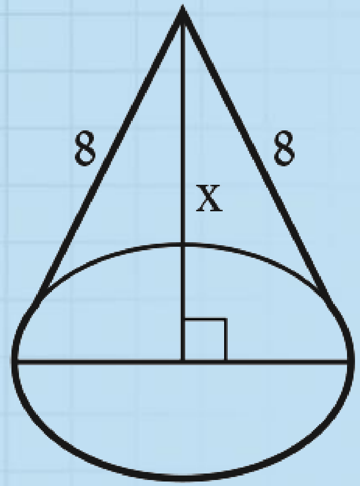
נגזור ונשווה לאפס $y' = 4\pi x - \frac{108\pi}{x^2} = 0$, לכן $x^3 = \frac{108\pi}{4\pi}$.

כלומר $x^3 = 27$, לכן $x = 3$, ז"א רדיוס הבסיס הוא 3 ס"מ.

בעזרת הנגזרת השנייה אפשר להראות שזהו מינימום.

תרגיל לדוגמה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב – פונקציות עם שורשים



דוגמא ג':

מבין כל החרוטים הישרים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 8 ס"מ מצא את גובה החרוט בעל הנפח המקסימלי.

פתרון:

אם גובה החרוט הוא x אז עפ"י **משפט פיתגורס** רדיוסו הוא $\sqrt{64-x^2}$.

נפח חרוט ישר שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס בגובה,

אם נסמנו ב-$f(x)$ נקבל $f(x) = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{64-x^2}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi(64x-x^3)$ נגזור ונשווה לאפס:

$f'(x) = \frac{1}{3}\pi(64-3x^2) = 0$, לכן $64 = 3x^2$ ומכאן $x = \sqrt{\frac{64}{3}} = 4.62$ ס"מ.

הנגזרת השנייה היא $f''(x) = -2x\pi$ ולכן זהו מקסימום.

בהצלחה